

## Metodo di Eulero

Il metodo di Eulero è un metodo iterativo, che ci permette di risolvere con estrema facilità, attraverso il foglio elettronico di EXCEL, le equazioni differenziali.

Le equazioni differenziali sono delle equazioni nelle quali bisogna andare a calcolare la funzione incognita, che soddisfa l'equazione in questione.

In pratica, il metodo di Eulero, consente iterativamente (dove iterativo sta per un calcolo che si ripete all'infinito, fino a quando non si verificano particolari condizioni a seconda del problema), di calcolare il valore futuro di una grandezza ( $F_{k+1}$ ), essendo a conoscenza del valore presente istantaneo ( $F_k$ ), e di altri dati.

La formula di Eulero è la seguente:

$$v_{k+1} = v_k + (e_k - v_k) \cdot \frac{dt}{\tau}$$

Dove  $v_{k+1}$  sta per il valore futuro della grandezza,  $v_k$  sta per valore presente,  $e_k$  per valore massimo,  $dt$  per la frazione infinitesima (infinitamente piccola) di tempo che andiamo a prendere in considerazione e  $\tau$  per costante di tempo.

La formula di Eulero, per fare un esempio più semplice, è la generalizzazione di altre equazioni quale ad esempio l'equazione di carica di un condensatore. Consente cioè di calcolare il valore di una grandezza riferita all'oggetto in questione in un istante di tempo ( $t$ ) a nostra scelta.

In formula è riportata l'equazione di carica di un condensatore con riferimento alla tensione:

$$v_c = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

La nostra esperienza di laboratorio, riguardante il metodo di Eulero consisteva nell'applicazione della formula nel caso di tre tipi diversi di segnali:

1. segnali a gradino
2. segnali a rampa
3. segnali sinusoidali

Di seguito sono riportate le immagini del foglio elettronico di EXCEL, con i relativi grafici, che includono anche le risposte ai segnali.

### *Risposta al gradino*

Un esempio di segnale a gradino, è la tipica curva di carica di un condensatore. Nel grafico risultante è stata tracciata anche una retta che è chiaramente tangente al gradino. L'intersezione di questa tangente, con la retta che individua il valore massimo da raggiungere ( $e_k$ ), descrive un segmento che ha per estremi, le intersezioni della retta del valore massimo con l'asse  $y$  (l'asse delle tensioni), e con la tangente al gradino.

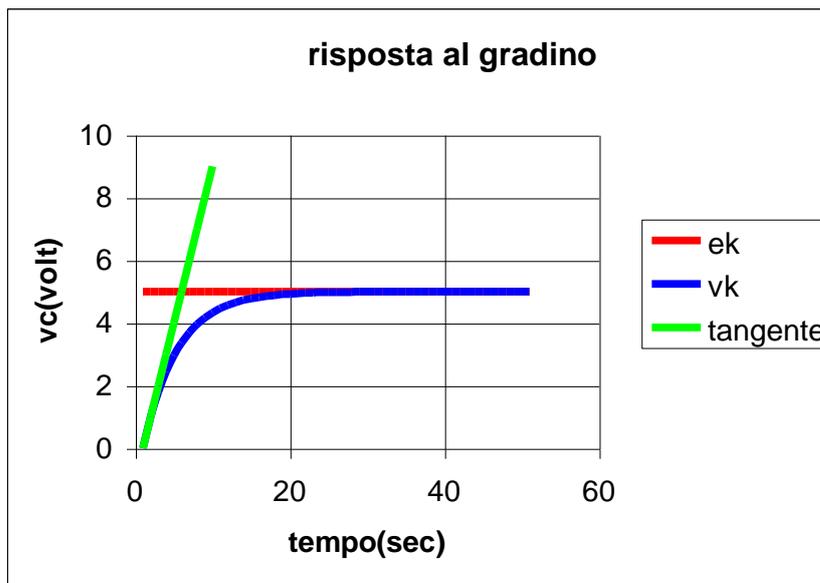
Si dimostra matematicamente che il segmento individuato ha lunghezza pari al valore di  $\tau$ .

L'iteratività della formula di Eulero consiste nel fatto che, è possibile calcolare, mediante calcoli ripetuti anche all'infinito, tutti i valori di tensione che troviamo ai capi del condensatore.

Naturalmente più il numero dei calcoli tenderà ad infinito, più il valore di  $v_k$  tenderà a  $e_k$ .

tk	ek	vk
0	5	0
0,2	5	1
0,4	5	1,8
0,6	5	2,44
0,8	5	2,952
1	5	3,3616
1,2	5	3,68928
1,4	5	3,951424
1,6	5	4,161139
1,8	5	4,328911
2	5	4,463129
2,2	5	4,570503
2,4	5	4,656403
2,6	5	4,725122
2,8	5	4,780098
3	5	4,824078
3,2	5	4,859263
3,4	5	4,88741
3,6	5	4,909928
3,8	5	4,927942
4	5	4,942354
4,2	5	4,953883
4,4	5	4,963107
4,6	5	4,970485
4,8	5	4,976388
5	5	4,981111
5,2	5	4,984888
5,4	5	4,987911
5,6	5	4,990329
5,8	5	4,992263
6	5	4,99381
6,2	5	4,995048
6,4	5	4,996039
6,6	5	4,996831
6,8	5	4,997465
7	5	4,997972
7,2	5	4,998377
7,4	5	4,998702
7,6	5	4,998962
7,8	5	4,999169
8	5	4,999335
8,2	5	4,999468
8,4	5	4,999575
8,6	5	4,99966
8,8	5	4,999728
9	5	4,999782
9,2	5	4,999826
9,4	5	4,999861
9,6	5	4,999888
9,8	5	4,999911
10	5	4,999929

$\tau$  = 1      tangente  
 $e$  = 5      0  
 $dt$  = 0,2      1  
                  2  
                  3  
                  4  
                  5  
                  6  
                  7  
                  8  
                  9

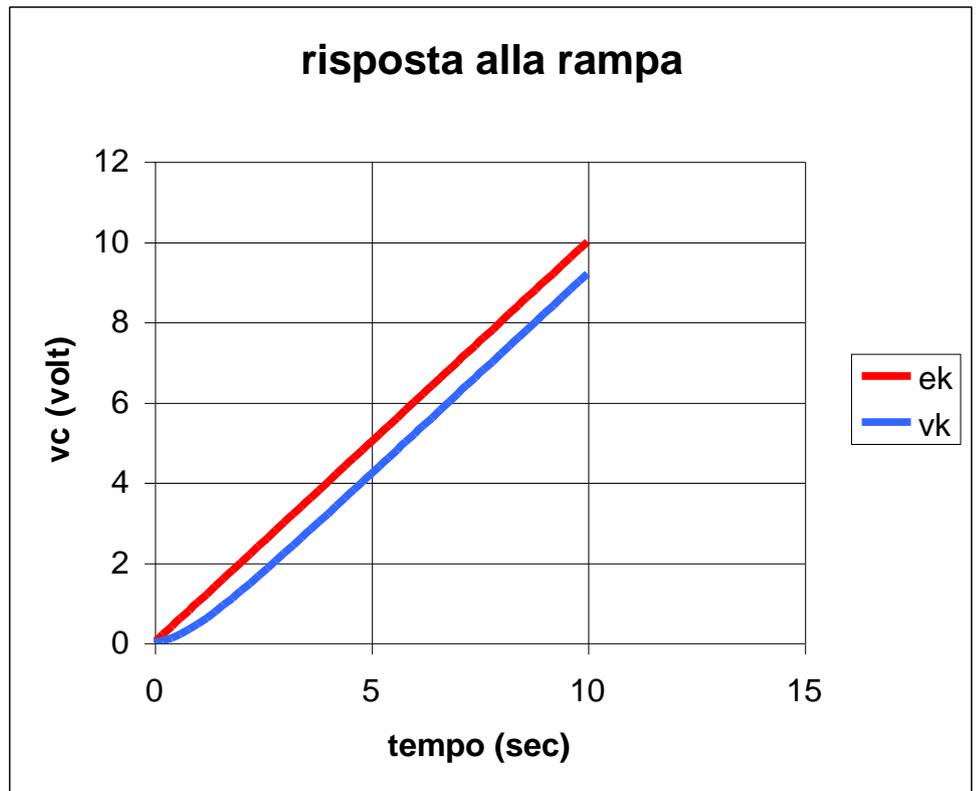


Il grafico riportato di sopra rappresenta con chiarezza la curva di  $v_k$  a forma di gradino, la tangente al gradino, e la retta che individua il valore massimo da raggiungere ( $e_k$ ).

Di seguito vengono invece riportati i calcoli ed i corrispondenti grafici realizzati dall' Excel riguardanti segnali a rampa:

tk	ek	Vk
0	0	0
0,2	0,2	0,04
0,4	0,4	0,112
0,6	0,6	0,2096
0,8	0,8	0,32768
1	1	0,462144
1,2	1,2	0,6097152
1,4	1,4	0,7677722
1,6	1,6	0,9342177
1,8	1,8	1,1073742
2	2	1,2858993
2,2	2,2	1,4687195
2,4	2,4	1,6549756
2,6	2,6	1,8439805
2,8	2,8	2,0351844
3	3	2,2281475
3,2	3,2	2,422518
3,4	3,4	2,6180144
3,6	3,6	2,8144115
3,8	3,8	3,0115292
4	4	3,2092234
4,2	4,2	3,4073787
4,4	4,4	3,605903
4,6	4,6	3,8047224
4,8	4,8	4,0037779
5	5	4,2030223
5,2	5,2	4,4024179
5,4	5,4	4,6019343
5,6	5,6	4,8015474
5,8	5,8	5,0012379
6	6	5,2009904
6,2	6,2	5,4007923
6,4	6,4	5,6006338
6,6	6,6	5,8005071
6,8	6,8	6,0004056
7	7	6,2003245
7,2	7,2	6,4002596
7,4	7,4	6,6002077
7,6	7,6	6,8001662
7,8	7,8	7,0001329
8	8	7,2001063
8,2	8,2	7,4000851
8,4	8,4	7,6000681
8,6	8,6	7,8000544
8,8	8,8	8,0000436
9	9	8,2000348
9,2	9,2	8,4000279
9,4	9,4	8,6000223
9,6	9,6	8,8000178
9,8	9,8	9,0000143
10	10	9,2000114

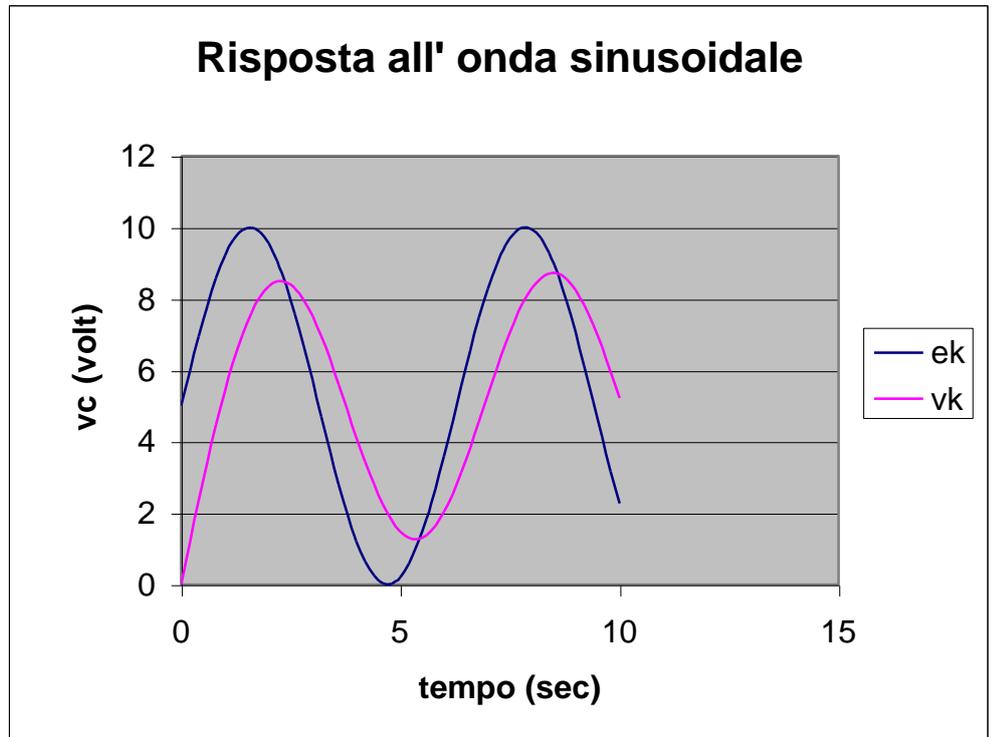
$$\tau (\tau) = \frac{1}{dt} = 0,2$$



Infine vengono riportate le immagini della risposta ad un onda sinusoidale:

tk	ek	vk
0	5	0
0,2	5,993347	1,198669
0,4	6,947092	2,348354
0,6	7,823212	3,443326
0,8	8,58678	4,472017
1	9,207355	5,419084
1,2	9,660195	6,267306
1,4	9,927249	6,999295
1,6	9,997868	7,59901
1,8	9,869238	8,053055
2	9,546487	8,351742
2,2	9,042482	8,48989
2,4	8,377316	8,467375
2,6	7,577507	8,289401
2,8	6,674941	7,966509
3	5,7056	7,514327
3,2	4,708129	6,953088
3,4	3,722294	6,306929
3,6	2,787398	5,603023
3,8	1,940711	4,87056
4	1,215988	4,139646
4,2	0,642121	3,440141
4,4	0,24199	2,800511
4,6	0,031545	2,246717
4,8	0,019177	1,801209
5	0,205379	1,482043
5,2	0,582727	1,30218
5,4	1,136178	1,268979
5,6	1,843667	1,383917
5,8	2,676989	1,642531
6	3,602923	2,03461
6,2	4,584553	2,544598
6,4	5,582746	3,152228
6,6	6,557707	3,833324
6,8	7,470567	4,560772
7	8,284933	5,305604
7,2	8,968339	6,038151
7,4	9,49354	6,729229
7,6	9,839598	7,351303
7,8	9,992717	7,879586
8	9,946791	8,293027
8,2	9,703653	8,575152
8,4	9,272995	8,714721
8,6	8,671985	8,706174
8,8	7,924586	8,549856
9	7,060592	8,252003
9,2	6,11445	7,824493
9,4	5,123877	7,284369
9,6	4,128366	6,653169
9,8	3,167604	5,956056
10	2,279894	5,220824

tau ( $\tau$ )= 1  
dt 0,2



**Scardicchio Sebastiano 3<sup>^</sup>ETB**