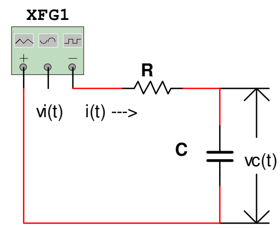
Analisi delle reti con la trasformata di Laplace

Si abbia un circuito RC, con uscita su C, alimentato da un generatore di tensione $v_i(t)$.
Il condensatore sia inizialmente carico al valore $v_c(0) = v_0$.



Applicando Kirchhoff alla maglia si ottiene:

$$v_i(t) = R \cdot i(t) + v_c(t) \tag{1}$$

Ove:

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = C\frac{dv_c}{dt} \tag{2}$$

Sostituendo la (2) nella (1):

$$v_i(t) = RC\frac{dv_c}{dt} + v_c(t) \tag{3}$$

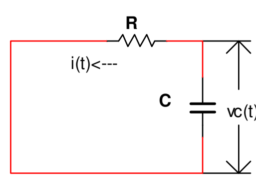
Passando alla trasformata di Laplace di entrambi i membri:

$$V_i(s) = RC[sV_c(s) - v_0] + V_c(s) = sRC \cdot V_c(s) - RC \cdot v_0 + V_c(s) \tag{4}$$

Si ricava per $V_c(s)$:

$$V_C(s) = \frac{V_i(s) + RC \cdot v_0}{1 + sRC} \tag{5}$$

1° caso: risposta libera

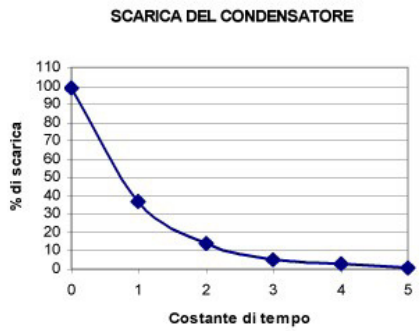


Se $v_i(t)=0$ anche $V_i(s)=0$ e quindi la (5) diventa:

$$V_C(s) = \frac{RC \cdot v_0}{1 + sRC} = \frac{v_0}{s + \frac{1}{RC}} \tag{6}$$

Antitrasformando la (6) si ottiene:

$$v_c(t) = v_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \tag{7}$$



2° caso: risposta forzata (valore iniziale: $v_c(0) = v_0 = 0$).

$$V_C(s) = \frac{V_i(s)}{1 + sRC}$$

Si definisce funzione di trasferimento F(s) il rapporto tra l'uscita e l'ingresso:

$$F(s) = \frac{V_C(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{1 + sRC} \tag{8}$$

Se $v_i(t)$ è un gradino di valore $V_{cc}=10V$:

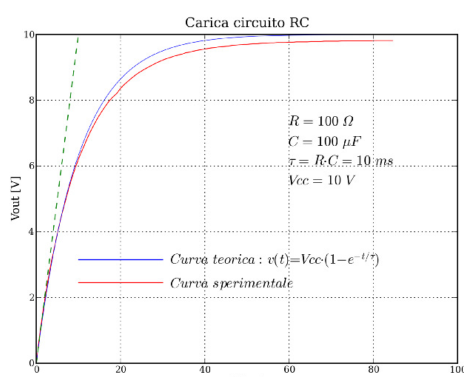
$$V_C(s) = \frac{V_{cc}}{s(1+sRC)} = \frac{\frac{V_{cc}}{RC}}{s\left(s + \frac{1}{RC}\right)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \frac{1}{RC}} \tag{9}$$

Determiniamo A e B col metodo dei *residui*:

$$A = \lim_{s\to 0} \frac{\frac{V_{cc}}{RC}}{s + \frac{1}{RC}} = V_{cc} \qquad\qquad B = \lim_{s \to -\frac{1}{RC}} \frac{\frac{V_{cc}}{RC}}{s} = -V_{cc} \tag{10}$$

Antitrasformando la (9) con i valori di A e B ricavati dalla (10) si ottiene:

$$v_c(t) = V_{cc}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$



(11)

$\tau = RC$ prende il nome di costante di tempo; $\omega_t=1/RC$ pulsazione d'angolo

3° caso: Se $v_o \neq 0$ e $V_i(s)=E/s$ (gradino di ampiezza E) dalla (5) si ottiene:

$$V_C(s)=\frac{E/s+RC\cdot v_0}{1+sRC}=\frac{E+sRC\cdot v_0}{1+sRC}=\frac{\frac{E}{RC}+sv_0}{s\left(s+\frac{1}{RC}\right)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+\frac{1}{RC}} \qquad (12)$$

Determiniamo A e B col metodo dei residui:

$$A=\lim_{s\to 0}\frac{\frac{E}{RC}+sv_0}{s+\frac{1}{RC}}=E \qquad\qquad B=\lim_{s\to -\frac{1}{RC}}\frac{\frac{E}{RC}+sv_0}{s}=v_0-E \qquad (13)$$

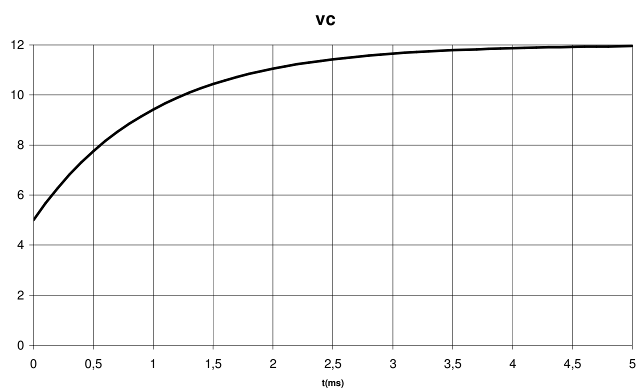
Antitrasformando la (12) con i valori di A e B ricavati dalla (13) si ottiene:

$$v_c(t)=E+(v_0-E)\cdot e^{-\frac{t}{RC}} \qquad (14)$$

Valutiamo il valore iniziale e finale della (14):

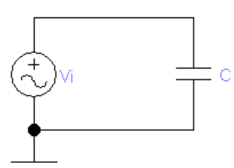
$$v_c(0)=E+(v_0-E)\cdot e^{-\frac{0}{RC}}=E+v_0-E=v_0; \qquad v_c(\infty)=E$$

Si mostra la curva di carica del condensatore con valore iniziale 5V ed alimentato da un generatore di tensione costante di valore E=12V.



Modello complesso del condensatore C e dell'induttanza L

Si abbia un generatore ideale di tensione $v_i(t)$ collegato direttamente ad un condensatore di capacità C.



(15)

Il legame che sussiste tra la corrente $i(t)$ e la $v_C(t)$ è:

$$i(t)=C\frac{dv_C(t)}{dt}$$

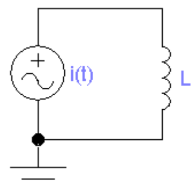
Supponendo il condensatore inizialmente scarico, $v_c(0)=0$, applicando la trasformata di Laplace ad entrambi i membri della (15) si ottiene:

$$I(s) = C \cdot [s \cdot V_C(s)] \qquad (16)$$

Dalla precedente relazione si ricava l'impedenza complessa del condensatore:

$$Z_c = \frac{V_C(s)}{I(s)} = \frac{1}{sC}$$

Analogamente per l'induttanza pilotata da un generatore di corrente *i(t):*



$$v_L(t) = L\frac{di(t)}{dt} \qquad (17)$$

Trasformando entrambi i membri si ha:

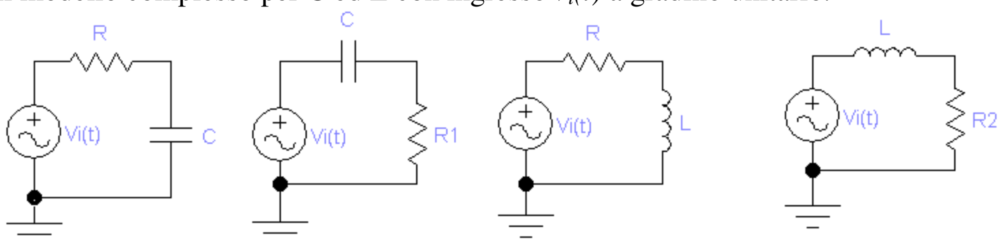
$$V_L(s) = L \cdot s \cdot I(s) \qquad (18)$$

Da cui è facile ricavare l'impedenza complessa Z_L dell'induttanza:

$$Z_L = \frac{V_L(s)}{I(s)} = sL$$

Esercizio n.2

Ricavare la f.d.t. F(s) e $v_C(t)$, $v_{R1}(t)$, $v_L(t)$, $v_{R2}(t)$ per i seguenti 4 circuiti utilizzando il modello complesso per C ed L con ingresso $v_i(t)$ a gradino unitario.



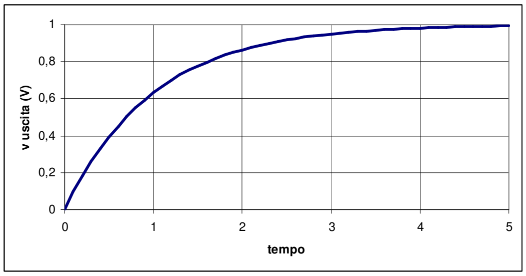
1) $$V_C(s) = V_i(s) \cdot \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = V_i(s) \cdot \frac{1}{1 + sRC} = V_i(s) \cdot \frac{1/RC}{s + 1/RC} = V_i(s) \cdot \frac{\omega_t}{s + \omega_t}$$

La f.d.t. vale: $F(s) = \frac{V_C(s)}{V_i(s)} = \frac{\omega_t}{s + \omega_t}$ ove $\omega_t = 1/RC$ è la pulsazione di taglio.

$$V_C(s) = V_i(s) \cdot \frac{\omega_t}{s + \omega_t} = \frac{1}{s} \cdot \frac{\omega_t}{s + \omega_t} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \omega_t}$$

$A = \lim_{s \to 0} \frac{\omega_t}{s + \omega_t} = 1$ $\qquad B = \lim_{s \to -\omega_t} \frac{\omega_t}{s} = -1$ per cui antitrasformando:

$$v_c(t) = 1 - e^{-\omega_t \cdot t}$$



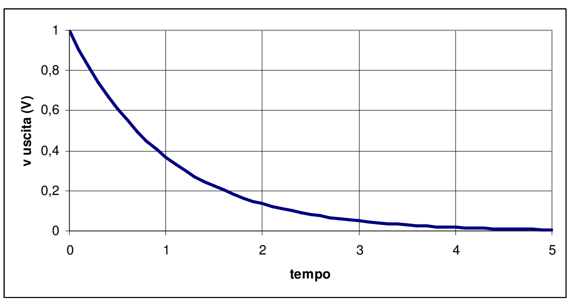
Andamento temporale per $\omega_t=1$

2) $V_R(s) = V_i(s) \cdot \dfrac{R}{R + \dfrac{1}{sC}} = V_i(s) \cdot \dfrac{sRC}{1 + sRC} = V_i(s) \cdot \dfrac{s}{s + 1/RC} = V_i(s) \cdot \dfrac{s}{s + \omega_t}$

La f.d.t. vale: $F(s) = \dfrac{V_R(s)}{V_i(s)} = \dfrac{s}{s + \omega_t}$

$V_R(s) = V_i(s) \cdot \dfrac{s}{s + \omega_t} = \dfrac{1}{s} \cdot \dfrac{s}{s + \omega_t} = \dfrac{1}{s + \omega_t}$ per cui antitrasformando:

$$v_R(t) = e^{-\omega_t \cdot t}$$



Andamento temporale per $\omega_t=1$

3) $V_L(s) = V_i(s) \cdot \dfrac{sL}{R + sL} = V_i(s) \cdot \dfrac{s}{s + R/L} = V_i(s) \cdot \dfrac{s}{s + \omega_t}$

ove $\omega_t=R/L$ è la pulsazione di taglio.

La f.d.t. vale: $F(s) = \dfrac{V_L(s)}{V_i(s)} = \dfrac{s}{s + \omega_t}$

$V_L(s) = \dfrac{1}{s} \cdot \dfrac{s}{s + \omega_t} = \dfrac{1}{s + \omega_t}$ da cui: $v_L(t) = e^{-\omega_t \cdot t}$

4) Procedendo come nei casi precedenti si ottiene:

$V_R(s) = V_i(s) \cdot \dfrac{\omega_t}{s + \omega_t}$ ove $\omega_t=R/L$ è la pulsazione di taglio.

$F(s) = \dfrac{V_R(s)}{V_i(s)} = \dfrac{\omega_t}{s + \omega_t}$ da cui: $V_R(s) = \dfrac{1}{s} \cdot \dfrac{\omega_t}{s + \omega_t} = \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s + \omega_t}$ con: $A=1$ e $B=-1$

Infine: $v_R(t) = 1 - e^{-\omega_t \cdot t}$