Trasformata di Laplace

23.09.2013 – prof. Giuseppe Spalierno – ITT Panetti -Bari

Data una funzione del tempo f(t), definita per t ≥ 0, si dice trasformata di Laplace la funzione F(s) di variabile complessa s = a + jb data dal seguente integrale improprio:

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} \cdot f(t)dt$$

Spesso la trasformata di Laplace si indica anche utilizzando la L corsivo:

$$F(s) = \mathscr{L}[f(t)]$$

Nella seguente tabella si mostrano le trasformate di Laplace F(s) di alcune funzioni del tempo f(t):

n	**f(t)** per t≥0	**F(s)**
1	1 *(gradino unitario)*	$\frac{1}{s}$
2	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
3	t *(rampa)*	$\frac{1}{s^2}$
4	t^n *(parabola per n=2)*	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
6	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
7	$\frac{1}{b-a}\left(e^{-at}-e^{-bt}\right)$	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$
8	$e^{-at} \cdot t^n$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
9	$e^{-at} \cdot \sin(\omega t)$ oscillazione smorzata per a>0	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
10	$e^{-at} \cdot \cos(\omega t)$ oscillazione smorzata per a>0	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
11	$\frac{1}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n t$	$\frac{1}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$
12	δ(t) delta di Dirac	1
13	δ(t-a) delta di Dirac in t=a	e^{-as}

Proprietà molto utilizzate per svolgere facilmente la trasformata e l'antitrasformata di Laplace:

1) L[k·f(t)] = k·F(s) Esempio: L[5t] = $5/s^2$

La L-trasformata di una funzione f(t) per una costante k è uguale a k per la trasformata della funzione.

2) L[$k_1 \cdot f_1(t) + k_2 \cdot f_2(t)$] = $k_1 \cdot F_1(s) + k_2 \cdot F_2(s)$ Esempio: L[$2+3e^{-4t}$] = 2/s + 3/(s+4)

Proprietà di linearità: la L-trasformata di una combinazione lineare di due o più funzioni del tempo è la combinazione lineare delle trasformate delle singole funzioni con gli stessi coefficienti moltiplicativi k.

3) $L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = s \cdot F(s) - f(0)$ Teorema della derivata

Esempio: $L\left[\frac{d}{dt}sen(t)\right] = s\frac{1}{s^2+1} - sen(0) = \frac{s}{s^2+1}$ (coincidente con la L-trasf. del coseno, rigo 6 della tabella)

4) $L\left[\int f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s}$ Teorema dell'integrale

Esempio: $L\left[\int 1dt\right] = \frac{1/s}{s} = \frac{1}{s^2}$ (coincidente con la L-trasf. della rampa, rigo 3 della tabella)

5) $f(0) = \lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} s \cdot F(s)$ Teorema del valore iniziale

Esempio: $\cos(0) = \lim_{t\to 0}\cos(t) = \lim_{s\to\infty} s \cdot \frac{s}{s^2+1} = \lim_{s\to\infty}\frac{s^2}{s^2+1} = 1$

6) $f(\infty) = \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot F(s)$ Teorema del valore finale

Esempio: $\lim_{t\to\infty} e^{-3t} = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{s+3} = \frac{0}{3} = 0$

7) $L\left[e^{-at} \cdot f(t)\right] = F(s+a)$ Teorema della traslazione

Esempi:

a) $L\left[e^{-4t} \cdot t\right] = \frac{1}{(s+4)^2}$ *(vedi rigo 8 della tabella)*

b) $L\left[e^{-3t} \cdot \sin(10t)\right] = \frac{10}{(s+3)^2 + 100}$ *(vedi rigo 9 della tabella)*

<u>Avvertimento:</u>

La trasformata di Laplace del prodotto di 2 o più funzioni del tempo **<u>NON</u>** è il prodotto delle trasformate. Per ottenere il risultato desiderato si debbono consultare le tabelle più dettagliate delle trasformate oppure risolvere l'integrale improprio della definizione oppure ricorrere ad alcuni forme equivalenti.

Esempio:

f(t)=sen(t)*cos(t) **NON** si trasforma in: $F(s) \neq \frac{1}{s^2+1}\frac{s}{s^2+1}$

Dalle note formule di duplicazione si ricava:

f(t)=sen(2t)/2 per cui la trasformata di Laplace di f(t) vale: $F(s) = \frac{1}{2}\frac{2}{s^2+4} = \frac{1}{s^2+4}$

Antitrasformata di Laplace

L'operazione che consente di ottenere la funzione del tempo f(t) a partire dalla conoscenza della trasformata di Laplace F(s) prende il nome di antitrasformazione di Laplace e si scrive:

$$f(t) = L^{-1}[F(s)]$$

Consultando la tabella delle trasformate in senso inverso potrebbe essere possibile ottenere immediatamente la funzione f(t) desiderata ma ciò non sempre si verifica. In genere la F(s) è una funzione razionale fratta, cioè un rapporto di polinomi nella variabile complessa s. Scomponendo la F(s) in somma di frazioni parziali è possibile ottenere una serie di piccoli contributi presenti nella tabella delle trasformate.

$F(s)=\dfrac{N(s)}{D(s)}$ ove N(s) è il polinomio a numeratore (che potrebbe essere anche una semplice costante). I valori di s che annullano il numeratore N(s) prendono il nome di **zeri**.

I valori di s che annullano il polinomio a denominatore D(s) prendono il nome di **poli**.

In genere il grado del polinomio a denominatore è maggiore o uguale al grado del polinomio a numeratore, cioè il numero degli zeri non è mai superiore al numero dei poli.

Gli zeri ed i poli possono essere reali o complessi. Se esiste una soluzione complessa esiste anche la soluzione complessa e coniugata. Un polo complesso, ad esempio, è costituito dai seguenti contributi: p = a + jb ove a è la parte reale e b è la parte immaginaria. Il coniugato di p, che indicheremo con p^* vale: $p^* = a - jb$.

I poli, inoltre, potrebbero avere molteplicità 1 o più di uno.

Nel caso di 2 poli reali con molteplicità 1 la F(s) è così scomponibile con numeratore di grado inferiore a quello del denominatore:

$$F(s)=\frac{N(s)}{(s-p_1)(s-p_2)}=\frac{A}{s-p_1}+\frac{B}{s-p_2}$$

I coefficienti A e B prendono il nome di **residui** e si possono immediatamente calcolare con le seguenti formule:

$$A=\lim_{s\to p_1}F(s)(s-p_1)\,;\quad B=\lim_{s\to p_2}F(s)(s-p_2)$$

Esempio 1

Antitrasformare la seguente funzione complessa: $F(s)=\dfrac{5s}{s^2+3s+2}$

Calcoliamo i poli dell'equazione **caratteristica**:

$$s^2+3s+2=0 \quad \rightarrow \quad p_1 = -1;\ \ p_2 = -2$$

La F(s) si può così scomporre:

$$F(s)=\frac{5s}{(s+1)(s+2)}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s+2}$$

$$A=\lim_{s\to p_1}F(s)(s-p_1)=\lim_{s\to -1}\frac{5s}{(s+1)(s+2)}(s+1)=\lim_{s\to -1}\frac{5s}{(s+2)}=\frac{-5}{-1+2}=-5$$

$$B=\lim_{s\to p_2} F(s)(s-p_2)=\lim_{s\to -2}\frac{5s}{(s+1)(s+2)}(s+2)=\lim_{s\to -2}\frac{5s}{(s+1)}=\frac{-10}{-2+1}=10$$

Quindi:

$$F(s)=\frac{5s}{(s+1)(s+2)}=\frac{-5}{s+1}+\frac{10}{s+2}$$

Dal rigo 2 della tabella delle trasformate si ricava:

$$f(t) = -5e^{-t} + 10e^{-2t}$$

Esempio 2
Scomposizione della F(s) nel caso di due poli complessi coniugati.

$$F(s)=\frac{10}{s^2+8s+25}$$

Calcoliamo i poli dell'equazione caratteristica:

$$s^2+8s+25 = 0 \quad \rightarrow \quad p_1 = -4 - j3;\; p_2 = -4 + j3$$

La F(s) diventa:

$$F(s)=\frac{10}{(s+4+j3)(s+4-j3)}=\frac{A}{s+4+j3}+\frac{B}{s+4-j3}$$

$$A=\lim_{s\to p_1} F(s)(s-p_1)=\lim_{s\to -4-j3}\frac{10}{(s+4+j3)(s+4-j3)}(s+4+j3)=\lim_{s\to -4-j3}\frac{10}{s+4-j3}=\frac{10}{-j6}=j\frac{5}{3}$$

$$B=\lim_{s\to p_2} F(s)(s-p_2)=\lim_{s\to -4+j3}\frac{10}{(s+4+j3)(s+4-j3)}(s+4-j3)=\lim_{s\to -4+j3}\frac{10}{s+4+j3}=\frac{10}{j6}=-j\frac{5}{3}$$

Si osservi che anche i coefficienti A e B sono tra loro complessi e coniugati.

$$F(s)=\frac{j\frac{5}{3}}{s+4+j3}+\frac{-j\frac{5}{3}}{s+4-j3}$$

Se interessa conoscere la f(t), una volta assodato che p_1 e p_2 sono complessi e coniugati, si trasforma il trinomio a denominatore così:

$$s^2+8s+25 = s^2+8s+16 + 9 = (s+4)^2 + 3^2 \quad \text{per cui:}$$

$$F(s)=\frac{10}{(s+4)^2+3^2}=\frac{10}{3}\cdot\frac{3}{(s+4)^2+3^2}$$

dal rigo 9 della tabella ricaviamo la funzione f(t):

$$f(t)=\frac{10}{3}e^{-4t}\sin(3t)$$

Esempio 3
Poli con molteplicità maggiore di 1.

$F(s)=\dfrac{s+2}{(s+3)^2(s+1)}$ i poli sono: -3 con molteplicità 2 e -1 con molteplicità singola.

La scomposizione è la seguente:

$$F(s)=\frac{A_1}{(s+3)}+\frac{A_2}{(s+3)^2}+\frac{B}{s+1}$$

Il polo con molteplicità 2 interviene nella scomposizione con due termini: il primo con binomio a denominatore di primo grado, l'altro di secondo grado e quindi con due coefficienti da determinare. In presenza di un polo con molteplicità 3 avremmo avuto 3 termini distinti a denominatore: di primo, secondo e terzo grado con altrettanti coefficienti a numeratore da determinare.
Nel caso in questione A_2 si determina con lo stesso metodo dei residui mentre per A_1 si può applicare la formula di Hermite oppure applicare il metodo dell'identità dei polinomi.

$$B=\lim_{s\to -1}F(s)(s+1)=\lim_{s\to -1}\frac{s+2}{(s+3)^2}=\frac{1}{4}$$

$$A_2=\lim_{s\to -3}F(s)(s+3)^2=\lim_{s\to -3}\frac{s+2}{(s+1)}=\frac{1}{2}$$

Per determinare A_1 pongo per s, nella F(s) data ed in quella scomposta, un qualsiasi valore purché diverso dai poli, ad esempio s=0.

$F(0)=\dfrac{2}{9}$ e $F(0)=\dfrac{A_1}{3}+\dfrac{\frac{1}{2}}{9}+\dfrac{\frac{1}{4}}{1}$ uguagliando si ha: $\dfrac{2}{9}=\dfrac{A_1}{3}+\dfrac{1}{18}+\dfrac{1}{4}$ da cui si ricava: $A_1=-1/4$

$$f(t)=-\frac{1}{4}e^{-3t}+\frac{1}{2}t\cdot e^{-3t}+\frac{1}{4}e^{-t}$$

Esercizi proposti:

1) $F(s)=\dfrac{20}{s^2+7s+10}$ R: $f(t)=\dfrac{20}{3}e^{-2t}-\dfrac{20}{3}e^{-5t}$

2) $F(s)=\dfrac{50}{s^2+6s+34}$ R: $f(t)=10\cdot e^{-3t}\cdot\sin(5t)$

3) $F(s)=\dfrac{30}{(s^2+2s+1)(s+5)}$ R: $f(t)=\dfrac{15}{8}e^{-5t}+\left(-\dfrac{15}{8}+\dfrac{15}{2}t\right)\cdot e^{-t}$

Trasformate ed antitrasformate di Laplace con Matlab 7

```
>> syms t a b c

>> f1=a*t;
>> F1=laplace(f1)

F1 =

a/s^2
```

```
>> f2=a+b*exp(-c*t);
>> F2=laplace(f2)

F2 =

a/s+b/(s+c)
```

```
>> f3=2+3*exp(-4*t);
>> F3=laplace(f3)

F3 =

2/s+3/(s+4)
```

```
>> f4=exp(-4*t)*t;
>> F4=laplace(f4)

F4 =

1/(s+4)^2
```

```
>> f5=exp(-3*t)*sin(10*t);
>> F5=laplace(f5)

F5 =

1/10/(1/100*(s+3)^2+1)
>> pretty (F5)


                                   1
                    1/10 ------------------
                                        2
                         1/100 (s + 3)   + 1
```

```
>> f6=sin(t)*cos(t);
>> F6=laplace(f6)

F6 =
 1/(s^2+4)


>> pretty (F6)

                 1
               ------
                2
               s  + 4
```

```
>> F7=5*s/(s^2+3*s+2);
>> f7=ilaplace(F7)

f7 =

10*exp(-2*t)-5*exp(-t)
```

```
>> F8=10/(s^2+8*s+25);
>> f8=ilaplace(F8)

f8 =

10/3*exp(-4*t)*sin(3*t)
```

```
>> F9=(s+2)/((s+3)^2*(s+1));
>> pretty (F9)

                      s + 2
                 ----------------
                          2
                 (s + 3)   (s + 1)
>> f9=ilaplace(F9)

f9 =

(-1/4+1/2*t)*exp(-3*t)+1/4*exp(-t)

>> pretty(f9)

       (- 1/4 + 1/2 t) exp(-3 t) + 1/4 exp(-t)
```

```
>> F11=20/(s^2+7*s+10);
>> f11=ilaplace(F11)

f11 =

40/3*exp(-7/2*t)*sinh(3/2*t)


>> pretty(f11)

               40/3 exp(- 7/2 t) sinh(3/2 t)
>>
```

```
>> F12=50/(s^2+6*s+34)

F12 =

50/(s^2+6*s+34)


>> f12=ilaplace(F12)

f12 =

10*exp(-3*t)*sin(5*t)
```

```
>> F13=30/(s^2+2*s+1)/(s+5)

F13 =

30/(s^2+2*s+1)/(s+5)


>> pretty(F13)

                                   30
                        ----------------------
                          2
                        (s  + 2 s + 1) (s + 5)
>> f13=ilaplace(F13)

f13 =

15/8*exp(-5*t)+(-15/8+15/2*t)*exp(-t)
```