Tratto dal
Corso di Telecomunicazioni Vol. I
Ettore Panella Giuseppe Spalierno
Edizioni Cupido

Analisi armonica di Fourier

1. Generalità

L'analisi armonica dei segnali elettrici consiste nel considerare un segnale periodico o non periodico come un insieme, più o meno esteso, di funzioni fondamentali di tipo sinusoidale.
L'analisi armonica è fondamentale nello studio e nella progettazione di molti apparati elettrici, come ad esempio:
1) analisi armonica dei segnali modulati in ampiezza AM e in frequenza FM per la determinazione della banda di lavoro e la progettazione dei relativi circuiti e filtri in trasmissione e in ricezione;
2) analisi armonica dei segnali con modulazione digitale, tipo PCM, per la definizione del codice binario di trasmissione più idoneo;
3) conversione analogico-digitale e teorema del campionamento;
4) ricostruzione di segnali analogici da segnali digitali;
5) studio della distorsione negli amplificatori di potenza;
6) studio della stabilità dei sistemi di controllo mediante l'analisi armonica con i diagrammi di Bode e Nyquist.

I segnali elettronici possono essere analizzati o nel dominio del tempo e il relativo andamento è detto *forma d'onda* o nel dominio della frequenza e il relativo andamento è detto *spettro di frequenza.*
Lo sviluppo in serie di Fourier e la trasformata di Fourier sono dei metodi matematici che consentono di stabilire delle relazioni per il passaggio dal dominio del tempo a quello delle frequenze e viceversa.

2. Serie di Fourier

Lo sviluppo in serie di Fourier stabilisce che una funzione periodica f(t) di periodo T si può scomporre nella somma di segnali sinusoidali, denominati *armoniche,* di frequenza multipla di quella del segnale f(t). Si ha :

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + a_1\cos\omega t + a_2\cos 2\omega t + a_3\cos 3\omega t + \ldots \\ &\quad + b_1\operatorname{sen}\omega t + b_2\operatorname{sen}2\omega t + b_3\operatorname{sen}3\omega t \ldots \end{aligned} \qquad (1)$$

Il termine a_0 rappresenta la componente continua e si valuta come valor medio di f(t) nel T :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$

I coefficienti delle armoniche si calcolano mediante le seguenti formule:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cdot \cos n\omega t\cdot dt \ ; \ b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cdot \mathrm{sen}\, n\omega t\cdot dt$$

In forma compatta la (1) si scrive:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cdot \cos n\omega t + b_n \cdot \mathrm{sen}\, n\omega t) \qquad (2)$$

In particolare valgono le seguenti proprietà:

1) Se la funzione f(t) è *pari*, cioè: f(t) = f(-t) si ha:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cdot dt \ ; \ a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cdot \cos n\omega t\cdot dt \ ; \ b_n = 0$$

Lo sviluppo di Fourier contiene solo i termini coseno.

2) Se la funzione f(t) è *dispari*, cioè: f(t) = -f(-t) si ha:

$$a_0 = 0 \ ; \ a_n = 0 \ ; \ b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cdot \mathrm{sen}\, n\omega t\cdot dt$$

Lo sviluppo di Fourier contiene solo i termini seno.

2.1. Forma complessa dello sviluppo di Fourier

Applicando le formule di Eulero ai termini della serie (2) si ottiene:

$$\mathrm{sen}\, n\omega t = \frac{e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}}{2j} \ ; \ \cos n\omega t = \frac{e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}}{2}$$

si ottiene la seguente relazione nota come *forma complessa* dello sviluppo di Fourier:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \cdot e^{jn\omega t} \qquad (3)$$

dove:

$$F_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cdot e^{-jn\omega t}\cdot dt \qquad (4)$$

per n=0; ±1; ±2, ...

Una funzione periodica f(t) è costituita da infinite armoniche di pulsazione $n\omega=2\pi n/T$, ampiezza uguale al modulo $|F_n|$ della (4) e fase pari all'argomento di F_n.

2.2. Forma sinusoidale dello sviluppo di Fourier

Applicando alla serie (2) le seguenti relazioni trigonometriche:

$$a_n \cdot \cos n\omega t + b_n \cdot \operatorname{sen} n\omega t = A_n \cdot \cos(n\omega t - \varphi_n)$$

con:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \;\; ; \quad \varphi_n = \operatorname{arctg}\frac{b_n}{a_n}$$

e:

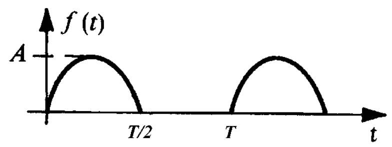
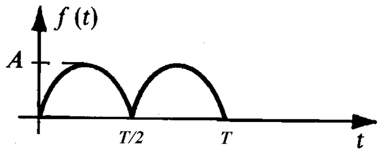
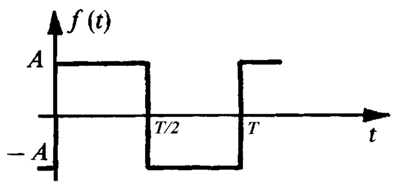
$$a_n = A_n \cdot \cos\varphi_n \; ; \;\; b_n = A_n \cdot \operatorname{sen}\varphi_n$$

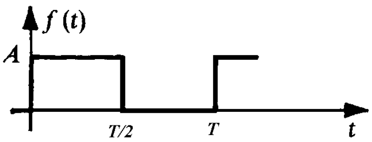
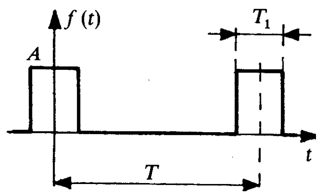
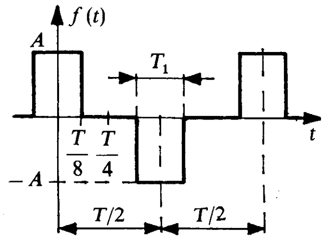
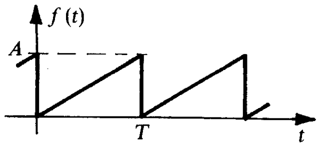
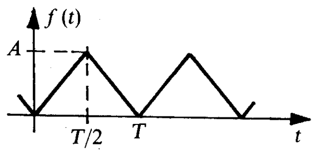
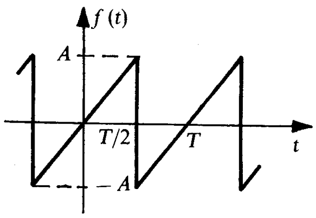
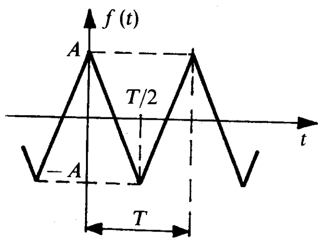
si ottiene:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(n\omega t - \varphi_n)$$

nota come *forma sinusoidale* dello sviluppo in serie di Fourier.
In tabella 1 si riportano gli sviluppi in serie di Fourier di alcune funzioni periodiche.

Tabella 1. Sviluppo in serie di Fourier

Funzione	f(t)	Sviluppo in serie
Sinusoide a una semionda. $f(t)=\begin{cases} A\cdot\operatorname{sen}\omega t; & 0\le t<T/2 \\ 0 & ;\; T/2\le t<T \end{cases}$		$f(t)=\frac{A}{\pi}+\frac{A}{2}\operatorname{sen}\omega t-\frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\omega t}{(2n)^2-1}$ con $T = 2\pi/\omega$
Sinusoide a doppia semionda. $f(t)=A\cdot\lvert\operatorname{sen}\omega t\rvert$		$f(t)=\frac{2A}{\pi}+\frac{4A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\omega t}{(2n)^2-1}$
Onda quadra bipolare. $f(t)=\begin{cases} A; & 0<t<T/2 \\ -A; & T/2<t<T \end{cases}$		$f(t)=\frac{4A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} n\omega t}{n}$ per n dispari

Onda quadra unipolare. $f(t)=\begin{cases} A\ ;\ 0<t<T/2 \\ 0\ ;\ T/2<t<T \end{cases}$		$f(t)=\frac{A}{2}+\frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\text{sen}\,n\omega t}{n}$ per n dispari
Onda rettangolare unipolare Duty - cycle D = T_1/T. $f(t)=\begin{cases} A;\ 0<t<\frac{T1}{2} \\ 0;\ \frac{T_1}{2}<t<T-\frac{T_1}{2} \\ A;\ T-\frac{T_1}{2}<t<T \end{cases}$		$f(t)=A\cdot D+$ $+2A\cdot D\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\text{sen}\,n\pi D}{n\pi D}\right)\cdot\cos n\omega t$ per D = 0.5 codice NRZ per D = 0.25 codice RZ 50 %
Onda rettangolare in codice AMI 50% (Alternative Mark inversion). $T_1=\frac{T}{4}$		$f(t)=A\cdot\left(\frac{\text{sen}\,n\pi/4}{n\pi/4}\right)\cdot\cos n\omega t$ per n dispari
Dente di sega unipolare $f(t)=\frac{A}{T}\cdot t;\ 0<t<T$		$f(t)=\frac{A}{2}-\frac{A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\text{sen}\,n\omega t}{n}$
Onda triangolare unipolare $f(t)=\begin{cases} \frac{2A}{T}\cdot t;\ 0<t<\frac{T}{2} \\ 2A\left(1-\frac{t}{T}\right);\ \frac{T}{2}<t<T \end{cases}$		$f(t)=\frac{A}{2}-\frac{4A}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\omega t}{n^2}$ per n dispari
Dente di sega unipolare $f(t)=\frac{2A}{T}\cdot T;\ -\frac{T}{2}<t<\frac{T}{2}$		$f(t)=\frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\text{sen}\,n\omega t}{n}$
Onda triangolare $f(t)=\begin{cases} A\left(1-\frac{4t}{T}\right);\ 0<t<\frac{T}{2} \\ A\left(-3+\frac{4t}{T}\right);\ \frac{T}{2}<t<T \end{cases}$		$f(t)=\frac{8A}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\omega t}{n^2}$ per n dispari

Si riportano, di seguito, alcuni esempi sulle serie di Fourier.

Esempio n.1

Determinare i coefficienti della serie di Fourier per l'onda quadra bipolare di ampiezza A e periodo T mostrata in fig.1.

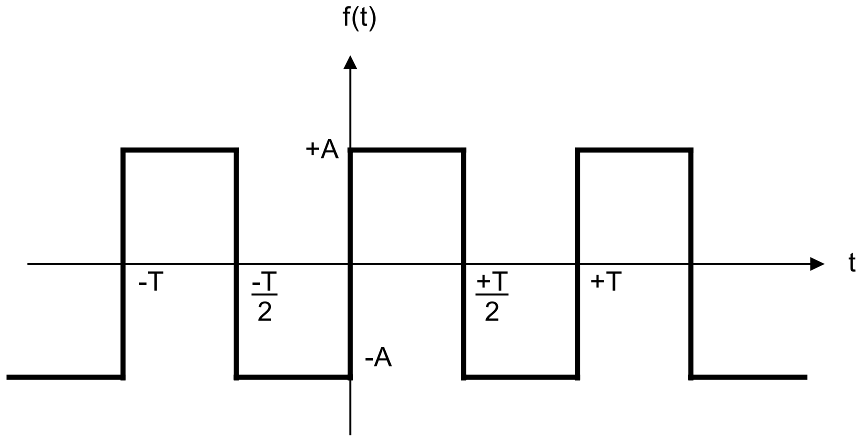


Fig.1. - Funzione ad onda quadra bipolare.

Risoluzione

La funzione assegnata è dispari: f(t) = -f(-t) come si deduce immediatamente dal diagramma temporale di fig.1.
Lo sviluppo in serie di Fourier contiene solo i termini seno. Si ha:

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cdot \operatorname{sen} n\omega t \cdot dt = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} A \cdot \operatorname{sen} n\omega t \cdot dt$$

Eseguendo l'integrale si ricava:

$$b_n = \frac{4A}{n\omega T}\cdot\left[-\cos n\omega t\right]_0^{T/2} = \frac{4A}{n\omega T}\cdot\left[-\cos n\omega\frac{T}{2} + \cos 0\right]$$

sapendo che $\omega=2\pi/T$ si ricava:

$$b_n = \frac{4A}{n\pi} \text{ per n dispari; } b_n = 0 \text{ per n pari.}$$

La serie di Fourier richiesta, perciò, vale:

$$f(t) = \frac{4A}{\pi}\left(\operatorname{sen}\omega t + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3\omega t + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 5\omega t + \frac{1}{7}\operatorname{sen} 7\omega t + ...\right)$$

In forma compatta si ha:

$$f(t) = \frac{4A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} n\omega t}{n} \qquad \text{per n dispari.}$$

In fig.2 si mostra la composizione dell'onda quadra di fig.1 con ampiezza A=1 utilizzando le armoniche di ordine 1, 3, 5.

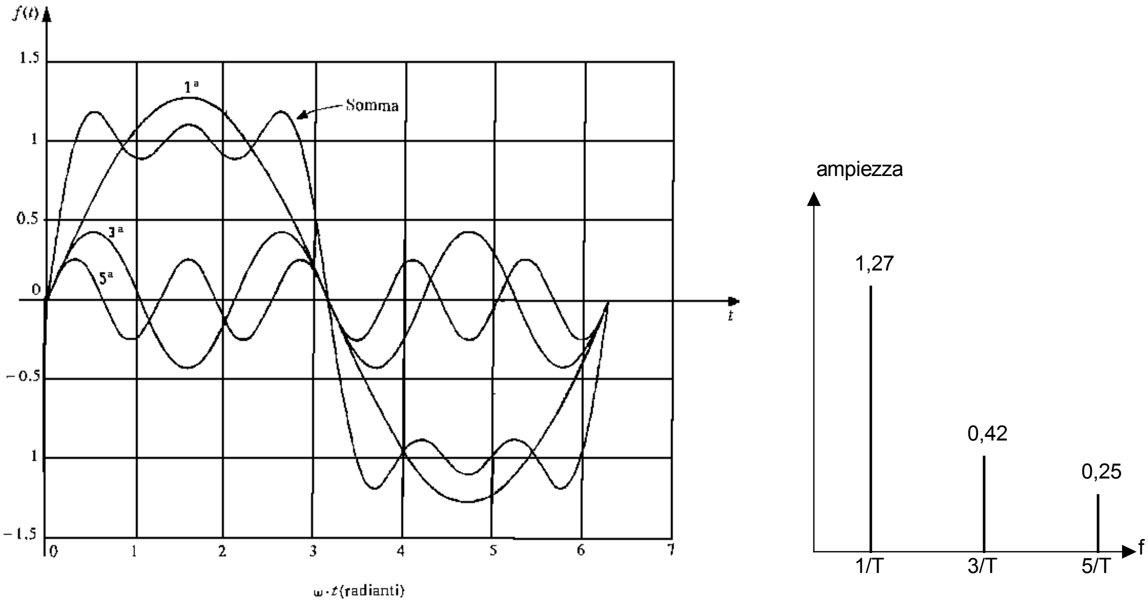


Fig.2. - Onda quadra: prime tre componenti armoniche della serie di Fourier e relativo spettro.

Esempio n.2

Determinare lo sviluppo in serie di Fourier per i segnali ad onda quadra di fig.3.

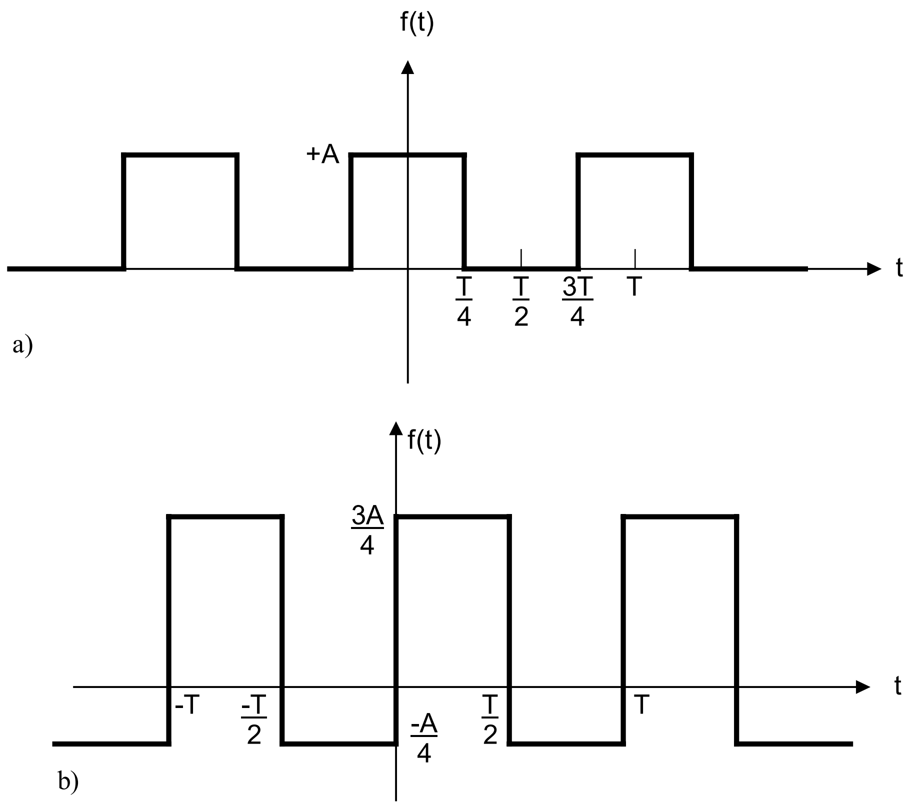


Fig.3. - a) Onda quadra unipolare; b) onda quadra bipolare.

Risoluzione

L'onda quadra mostrata in fig.3a) è una funzione pari poiché risulta f(t)=f(-t). Lo sviluppo in serie di Fourier contiene solo i termini coseno. La componente continua vale:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)dt = \frac{2}{T}\int_0^{T/4} A dt = \frac{2A}{T}\left[\frac{T}{4} - 0\right] = \frac{A}{2}$$

I coefficienti dei termini coseno si ottengono risolvendo il seguente integrale:

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cdot \cos n\omega t \cdot dt = \frac{4A}{T}\int_0^{T/4} \cos n\omega t \cdot dt = \frac{4A}{n\omega T}\left[\operatorname{sen} n\omega T\right]_0^{T/4}$$

Essendo $\omega=2\pi/T$, si ha:

$$a_n = \frac{2A}{n\pi}\cdot \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}$$

Lo sviluppo in serie di Fourier risulta:

$$f(t) = \frac{A}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2A}{n\pi}\cdot \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}\right)\cdot \cos n\omega t \qquad (5)$$

Considerando solo le prime armoniche si ha:

$$f(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi}\left(\cos\omega t - \frac{\cos 3\omega t}{3} + \frac{\cos 5\omega t}{5} ....\right)$$

Il segnale di fig.3b) può essere ottenuto da quello di fig.3a) traslando l'asse delle ascisse e delle ordinate.
La traslazione lungo l'asse delle ordinate modifica il valore medio della funzione che diventa:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^{T} f(t)dt = \frac{1}{T}\left[\int_0^{T/2} \frac{3A}{4}dt - \int_{T/2}^{T} \frac{A}{4}dt\right] = \frac{A}{4}$$

Per tener conto della traslazione lungo l'asse delle ascisse del tempo $\Delta t=T/4$ basta sostituire nel precedente sviluppo di Fourier (5) la variabile tempo ritardata: $t-\Delta t = t-T/4$ al posto di t.
Lo sviluppo di Fourier della funzione di fig.3b), pertanto, vale:

$$f(t) = \frac{A}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2A}{n\pi}\cdot \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}\right)\cdot \cos n\omega\left(t - \frac{T}{4}\right)$$

Dopo alcuni passaggi si ottiene:

$$f(t) = \frac{A}{4} + \frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} n\omega t}{n} \qquad \text{per n dispari.} \qquad (6)$$

Considerando solo le prime armoniche si ha:

$$f(t) = \frac{A}{4} + \frac{2A}{\pi}\left(\text{sen}\,\omega t + \frac{\text{sen}\,3\omega t}{3} + \frac{\text{sen}\,5\omega t}{5} ....\right)$$

L'espressione data dalla (6) si può ricavare, ovviamente, applicando le formule generali dello sviluppo di Fourier. Si ricava:

a_0=A/4; a_n=0; $b_n = \frac{A}{n\pi}(1-\cos n\pi) = \frac{2A}{n\pi}$ per n dispari; b_n=0 per n pari.

Lo sviluppo di Fourier risulta:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, \text{sen}\, n\omega t = \frac{A}{4} + \frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\text{sen}\, n\omega t}{n} \quad \text{per n dispari.}$$

Questa espressione coincide con la (6).
Dai risultati ottenuti si evince che una traslazione nel tempo non modifica l'ampiezza delle armoniche dello sviluppo di Fourier ma ne altera lo sfasamento.

3. Trasformata di Fourier

La trasformata di Fourier è un operatore matematico che consente di trasformare una funzione del tempo f(t) periodica o non periodica in una funzione F(jω) di variabile complessa. Valgono le seguenti relazioni:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot e^{-j\omega t}\cdot dt$$

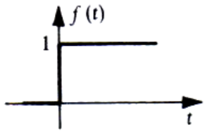
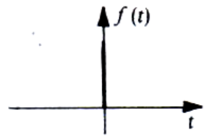
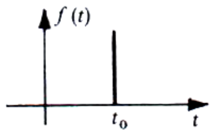
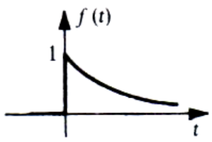
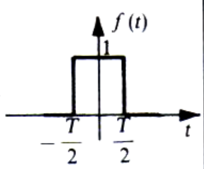
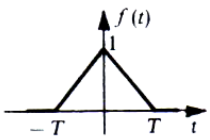
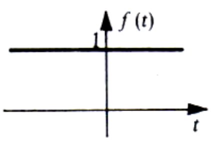
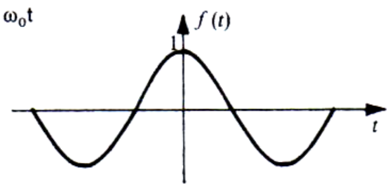
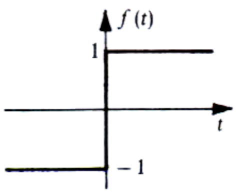
$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)\cdot e^{j\omega t}\cdot d\omega$$

La prima relazione è nota come *trasformata di Fourier* o *integrale di Fourier*, la seconda relazione è nota come *antitrasformata di Fourier*.
Le precedenti formule si indicano nel seguente modo:

$$F(j\omega) = \Im[f(t)]$$
$$f(t) = \Im^{-1}[F(j\omega)]$$

In tabella 2 si riportano le trasformate di Fourier di alcune funzioni di uso elettronico.

Tab. 2. Tabella di trasformate di Fourier.

Funzione	**f(t)**	**F(jω)**
Gradino unitario	$u(t) = \begin{cases} 1 \text{ per } t \geqslant 0 \\ 0 \text{ per } t < 0 \end{cases}$ 	$\frac{1}{j\omega} + \frac{1}{2}\delta(f)$
Delta di Dirac in $t=0$	$\delta(t) = \begin{cases} 0 \text{ per } t < 0 \\ \infty \text{ per } t = 0 \\ 0 \text{ per } t > 0 \end{cases}$ 	1
Delta di Dirac in $t=t_0$	$\delta(t-t_0)$ 	$e^{-j\omega t_0}$
Esponenziale decrescente	$f(t) = \begin{cases} e^{-at} \text{ per } t \geqslant 0 \\ 0 \text{ per } t < 0 \end{cases}$ 	$\frac{1}{j\omega + a}$
Impulso rettangolare	$f(t) = \begin{cases} 1 \text{ per } -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ 0 \text{ per } t \leqslant -\frac{T}{2} \text{ o } t \geqslant \frac{T}{2} \end{cases}$ 	$T \cdot \frac{\text{sen}\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}$
Impulso triangolare	$f(t) = \begin{cases} 1 - \frac{\lvert t \rvert}{T} \text{ per } \lvert t \rvert < T \\ 0 \text{ per } \lvert t \rvert \geqslant T \end{cases}$ 	$T \cdot \left(\frac{\text{sen}\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} \right)^2$
Costante	$f(t) = 1$ 	$\delta(f)$
Cosinusoide	$f(t) = \cos \omega_0 t$ 	$\frac{1}{2}[\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)]$
Gradino bipolare	$f(t) = \begin{cases} 1 \text{ per } t > 0 \\ -1 \text{ per } t < 0 \end{cases}$ 	$\frac{2}{j\omega}$

La trasformata di Fourier gode delle seguenti proprietà:

1) Linearità:

$$\Im[a \cdot f_1(t) \pm b \cdot f_2(t)] = a \cdot F_1(j\omega) \pm b \cdot F_2(j\omega)$$

2) Teorema della derivata:

$$\Im\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = j\omega \cdot F(j\omega)$$

3) Teorema dell'integrale:

$$\Im\left[\int f(t)dt\right] = \frac{F(j\omega)}{j\omega}$$

4) Teorema del ritardo:

$$\Im[f(t - t_0)] = F(j\omega) \cdot e^{-j\omega t_0}$$

5) se la funzione f(t) è *pari* si ha:

$$F(j\omega) = 2\int_0^\infty f(t) \cdot \cos\omega t \cdot dt \; ; \qquad f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty F(j\omega) \cdot \cos\omega t \cdot dt$$

6) se la funzione è *dispari* si ha:

$$F(j\omega) = -2j\int_0^\infty f(t) \cdot \operatorname{sen}\omega t \cdot dt \; ; \qquad f(t) = \frac{j}{\pi}\int_0^\infty F(j\omega) \cdot \operatorname{sen}\omega t \cdot dt$$