

Risposta al gradino di un circuito RLC

Si mostra in fig.1 il circuito in esame.

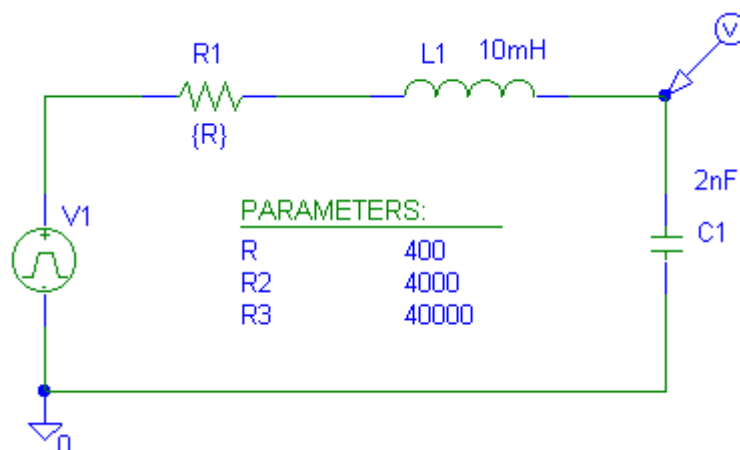


Fig.1 – Circuito RLC serie da valutare per tre diversi valori di R.

Indichiamo con V_i la tensione di ingresso del generatore e con V_u la tensione di uscita prelevata sul condensatore. Alla resistenza R saranno attribuiti i valori di $40K\Omega$, $4K\Omega$ e 400Ω .

Determiniamo la funzione di trasferimento (f.d.t.) nel dominio di Laplace dopo aver posto le impedenze complesse della induttanza e del condensatore, rispettivamente ai valori: sL e $1/sC$.

$$G(s) = \frac{V_u(s)}{V_i(s)} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + sL + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{s^2 LC + sRC + 1} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + s\frac{R}{L} + \frac{1}{LC}}$$

La f.d.t. presenta due poli e nessuno zero. Determiniamo i due poli applicando la formula ridottissima all'equazione di 2° grado a denominatore:

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

Si possono presentare 3 casi in funzione del segno del discriminante.

1° caso: $\Delta/4 > 0$ cioè: $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC} > 0 \rightarrow$ i poli sono reali e distinti.

2° caso: $\Delta/4 = 0$ cioè: $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC} = 0 \rightarrow$ i poli sono reali e coincidenti.

In tal caso si ha: $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow R = 2 \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{10 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-9}}} = 4,472K\Omega$

3° caso: $\Delta/4 < 0$ cioè: $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC} < 0 \rightarrow$ i poli sono complessi e coniugati.

Ciò si verifica per: $R < 4,472K\Omega$

Nell'analisi di questo caso porremo: $R = 400\Omega$.

Risoluzione del primo caso: poli reali e distinti.

Posto: $R = 40K\Omega$, ben maggiore di $4,472K\Omega$, la f.d.t. diventa:

$$G(s) = \frac{50 \cdot 10^9}{s^2 + 4 \cdot 10^6 s + 50 \cdot 10^9}$$

$$p_{1,2} = -2 \cdot 10^6 \pm \sqrt{4 \cdot 10^{12} - 0,05 \cdot 10^{12}} = -2 \cdot 10^6 \pm \sqrt{3,95} \cdot 10^6$$

da cui:

$$p_1 = (-2 + 1,98746) \cdot 10^6 = -12,54 \cdot 10^3$$

$$p_2 = (-2 - 1,98746) \cdot 10^6 = -3,98746 \cdot 10^6$$

L'uscita $V_u(s)$ nel dominio di Laplace, supponendo $V_i(s)=1/s$ (gradino unitario), vale:

$$V_u(s) = V_i(s) \cdot G(s) = \frac{50 \cdot 10^9}{s \cdot (s + 12,54 \cdot 10^3) \cdot (s + 3,98746 \cdot 10^6)}$$

Per ottenere la tensione di uscita $v_u(t)$ in funzione del tempo si deve antitrasformare la precedente formula. Prima, però, è necessario scomporre la $V_u(s)$ in somma di frazioni parziali.

$$V_u(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 12,54 \cdot 10^3} + \frac{C}{s + 3,98746 \cdot 10^6}$$

ove:

$$A = \lim_{s \rightarrow 0} V_u(s) \cdot s = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{50 \cdot 10^9}{(s + 12,54 \cdot 10^3) \cdot (s + 3,98746 \cdot 10^6)} = \frac{50 \cdot 10^9}{12,54 \cdot 10^3 \cdot 3,98746 \cdot 10^6} = 1$$

$$B = \lim_{s \rightarrow -12,54 \cdot 10^3} V_u(s) \cdot (s + 12,54 \cdot 10^3) = \lim_{s \rightarrow -12,54 \cdot 10^3} \frac{50 \cdot 10^9}{s \cdot (s + 3,98746 \cdot 10^6)} = \frac{50 \cdot 10^9}{-49,85 \cdot 10^9} = -1,0031$$

Poiché deve essere: $A + B + C = 0 \rightarrow C = -(A+B) = 0,0031$

Antitrasformando si ha:

$$v_u(t) = 1 - e^{-12,54 \cdot 10^3 \cdot t} + 0,0031 \cdot e^{-3,98746 \cdot 10^6 \cdot t}$$

Il terzo termine è trascurabile rispetto ai primi due perché il coefficiente 0,0031 è molto piccolo rispetto all'unità ed il polo, in valore assoluto, è troppo grande rispetto all'altro per cui l'ultimo esponenziale tende a zero parte dal valore 0,0031V e tende a zero assai prima dell'altro esponenziale. Per tali considerazioni l'uscita è approssimabile a:

$$v_u(t) = 1 - e^{-12,54 \cdot 10^3 \cdot t}$$

Si riporta in fig.2 l'andamento grafico in funzione del tempo.

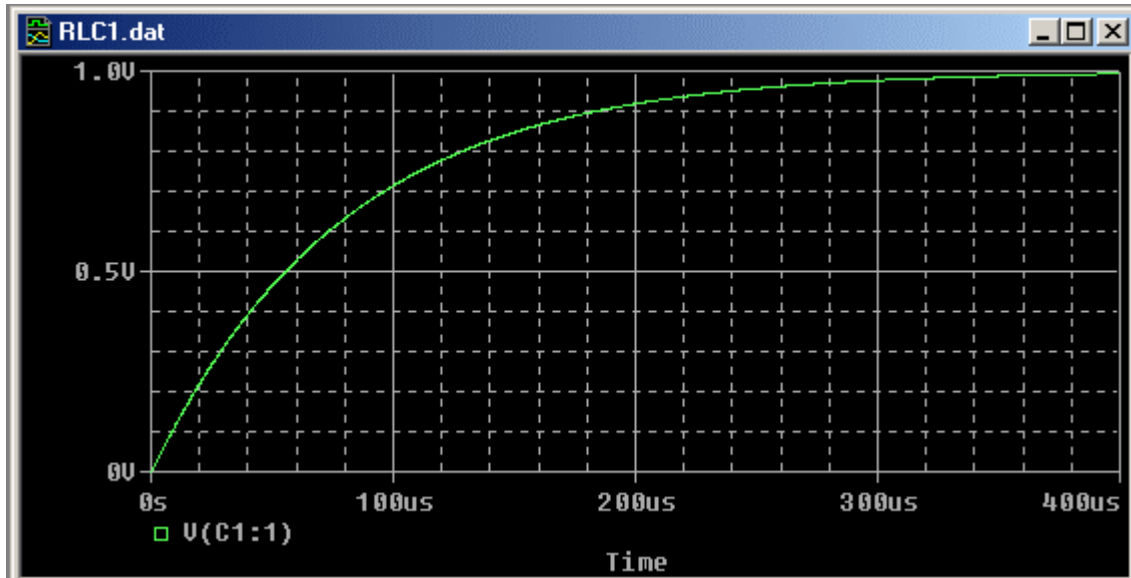


Fig.2 – Tensione sul condensatore: caso $R = 40K\Omega$ (poli reali e distinti).

La costante di tempo τ è l'antireciproco del polo p_1 :

$$\tau = \frac{1}{14,54 \cdot 10^3} = 69 \mu s$$

Dopo $t = \tau$ si ottiene:

$$v_u(t) = 1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{2,718} = \frac{1,718}{2,718} = 0,632V$$

In pratica per determinare sperimentalmente la costante di tempo τ si deve individuare dal grafico ottenuto (con PSpice oppure sullo schermo dell'oscilloscopio) l'istante in cui la tensione di uscita v_u assume il valore 0,632V.

Dal grafico, infine, si nota che viene raggiunto il valore di regime (1V) dopo un tempo di poco inferiore a 400 μs .

Risoluzione del secondo caso: poli reali e coincidenti.

$\Delta/4 = 0$, cioè:

$$p_1 = p_2 = -\frac{R}{2L} = -\frac{4,472 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^{-3}} = -223,6 \cdot 10^3$$

La risposta al gradino vale:

$$V_u(s) = \frac{50 \cdot 10^9}{s \cdot (s + 223,6 \cdot 10^3)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 223,6 \cdot 10^3} + \frac{C}{(s + 223,6 \cdot 10^3)^2}$$

$$A = \lim_{s \rightarrow 0} V_u(s) \cdot s = \frac{50 \cdot 10^9}{(223,6 \cdot 10^3)^2} = 1$$

$$C = \lim_{s \rightarrow -223,6 \cdot 10^3} \frac{50 \cdot 10^9}{s} = -223 \cdot 10^3$$

Applichiamo la regola della somma dei residui uguale a zero (si applica solo ai coefficienti che hanno a denominatore un polinomio di 1° grado).

$$A + B = 0 \rightarrow B = -A = -1$$

$$v_u(t) = 1 - e^{-223,6 \cdot 10^3 t} - 223,6 \cdot 10^3 \cdot t \cdot e^{-223,6 \cdot 10^3 t}$$

In questa espressione il secondo ed il terzo contributo non sono trascurabili.

Nelle seguenti figg. 3 e 4 si mostrano tali contributi. In fig.5, invece, si mostra la tensione di uscita $v_u(t)$.

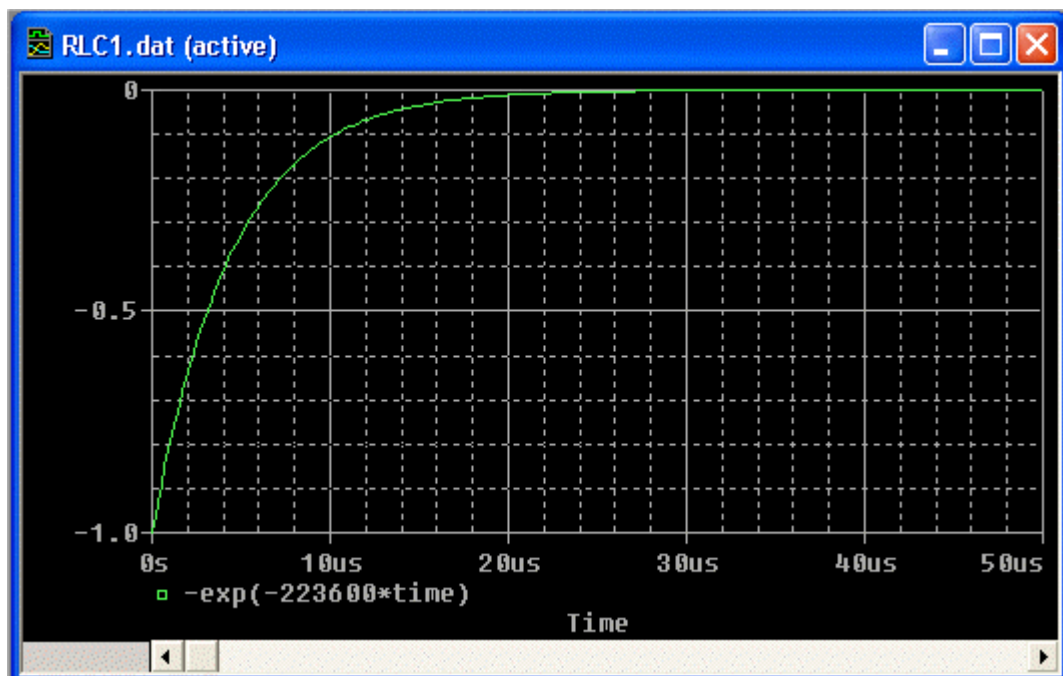


Fig.3 – Contributo del secondo termine dell'espressione matematica della tensione di uscita in funzione del tempo.

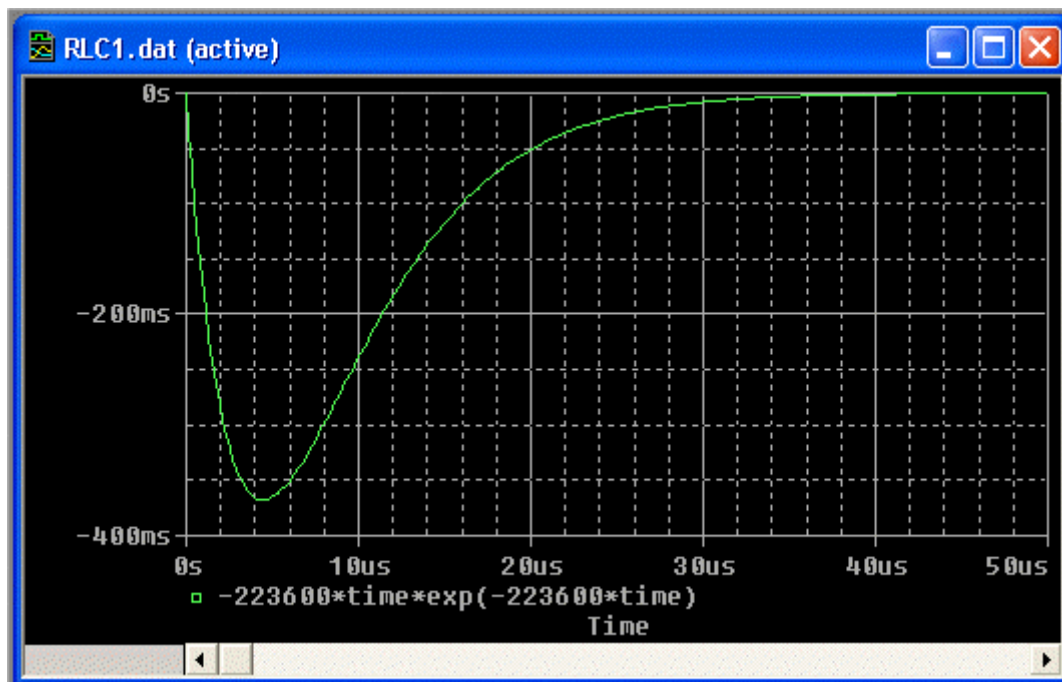


Fig.4 – Contributo del terzo termine dell'espressione matematica della tensione di uscita in funzione del tempo.

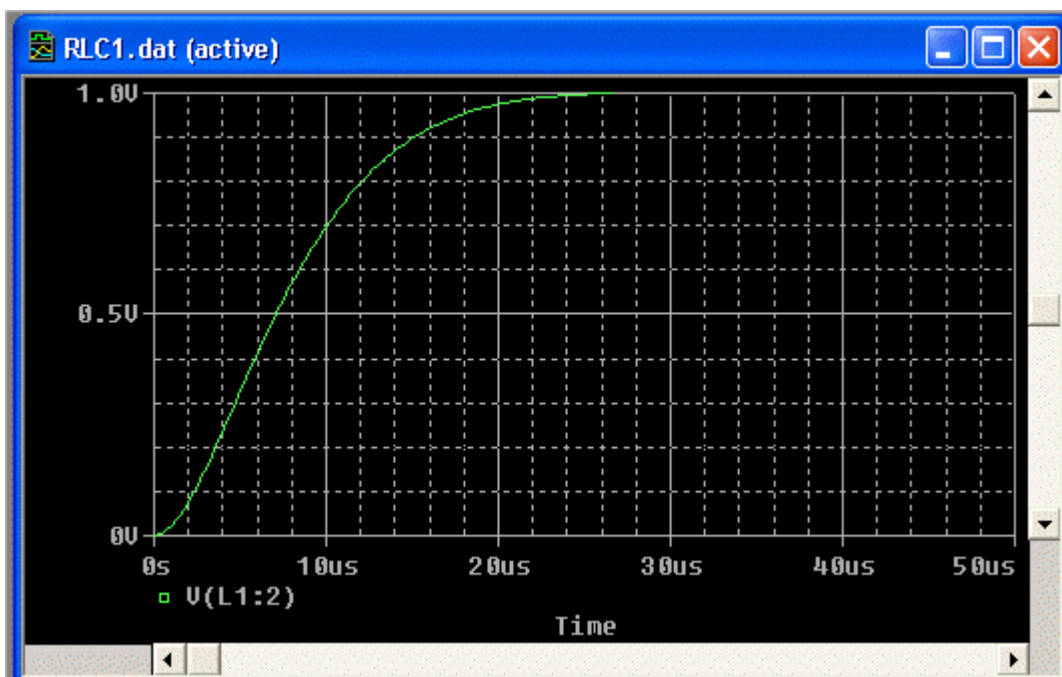


Fig.5 – Grafico della tensione di uscita nel caso di poli reali e coincidenti.

Dal grafico di fig.5 si nota come la risposta raggiunge il valore di regime dopo circa 25μs ed è, quindi, almeno 10 volte più veloce del caso precedente di poli reali e distinti.

Risoluzione del terzo caso: poli complessi e coniugati.

$\Delta/4 < 0$. Si pone $R = 400\Omega$.

Quando si affronta lo studio di un sistema del secondo ordine con poli complessi e coniugati si preferisce determinare i valori dei poli a denominatore risolvendo l'equazione:

$$s^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2 = 0$$

$$p_{1,2} = -\xi \cdot \omega_n \pm \sqrt{(\xi \cdot \omega_n)^2 - \omega_n^2} = -\xi \cdot \omega_n \pm \omega_n \cdot \sqrt{\xi^2 - 1} = -\xi \cdot \omega_n \pm j \omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi^2}$$

Poiché si è supposto: $\frac{\Delta}{4} < 0 \Rightarrow \xi^2 - 1 < 0 \Rightarrow \xi^2 < 1 \Rightarrow \xi < 1$

ξ prende il nome di smorzamento ed è positivo.

Se lo smorzamento è maggiore di 1 i poli sono reali e distinti, se è uguale a 1 i poli sono reali e coincidenti e, infine, se è minore di 1 i poli sono complessi e coniugati.

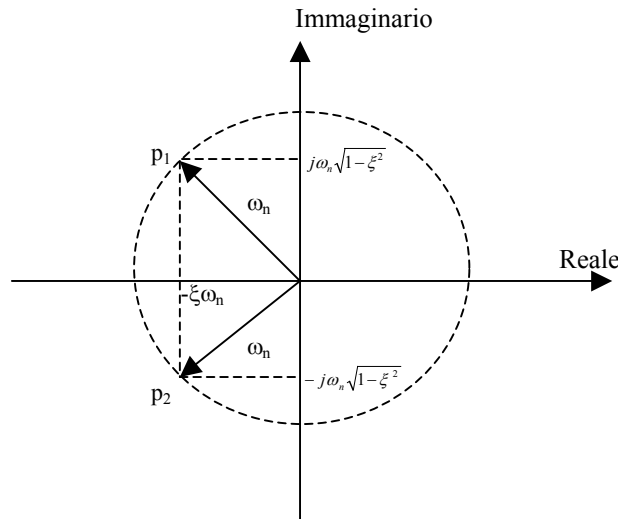


Fig.6 – Dislocazione dei poli nel piano complesso. Il modulo di ciascun polo vale ω_n .

Dal confronto tra l'espressione generale del denominatore: $s^2 + 2\xi\omega_n + \omega_n^2$ e quella del circuito RLC serie: $s^2 + R/L + 1/LC$ si deduce che:

$$\omega_n^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ (pulsazione naturale)}$$

$$2\xi\omega_n = \frac{R}{L} \Rightarrow \xi = \frac{R}{2L\omega_n} = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \text{ (smorzamento)}$$

$\tau = \frac{1}{\xi \omega_n} = \frac{1}{0.09 \cdot 223600} = 49.7 \mu s$ è detta “costante di tempo” (antireciproco della parte reale dei poli) mentre: $\omega_d = \omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \cong \omega_n = 223.6 Krad / sec.$ è nota come ”pulsazione naturale smorzata.

La pulsazione naturale ω_n dipende, dagli elementi reattivi L e C.

Fissati questi, lo smorzamento ξ dipende dalla resistenza R.

Si definisce resistenza critica R_C quel valore di R che rende lo smorzamento unitario, quindi:

$$\frac{R_C}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} = 1 \Rightarrow R_C = 2 \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Con i dati numerici a disposizione si ricava:

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{10 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-9}}} = \frac{1}{\sqrt{20 \cdot 10^{-12}}} = \frac{10^6}{\sqrt{20}} = 223,6 Krad / sec. \text{ (pulsazione naturale)}$$

$$\xi = \frac{R}{2\omega_n L} = \frac{400}{2 \cdot 223,6 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-3}} = \frac{400}{4472} = 0,09 \text{ (smorzamento)}$$

L'espressione di Laplace della risposta al gradino unitario è:

$$V_u(s) = V_i(s) \cdot G(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (*)$$

$$= \frac{50 \cdot 10^9}{s \cdot (s^2 + 40 \cdot 10^3 s + 50 \cdot 10^9)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 40 \cdot 10^3 s + 50 \cdot 10^9} \quad (**)$$

La precedente espressione in funzione della pulsazione naturale e dello smorzamento è disponibile nelle tabelle di conversione per cui è facile ricavare l'antitrasformata di Laplace della $V_u(s)$.

Ad ogni buon conto è possibile determinare i coefficienti A, B e C:

$$A = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot V_u(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{50 \cdot 10^9}{s^2 + 40 \cdot 10^3 s + 50 \cdot 10^9} = 1$$

Per determinare B e C si decide di applicare il principio di identità dei polinomi: si esegue la somma dei due termini della formula (**) e la si uguaglia alla espressione al primo membro.

Poiché i denominatori sono uguali, devono essere identicamente uguali anche i numeratori per cui si ha:

$$50 \cdot 10^9 \equiv s^2 + 40 \cdot 10^3 s + 50 \cdot 10^9 + Bs^2 + sC$$

$$50 \cdot 10^9 \equiv s^2(1 + B) + s(40 \cdot 10^3 + C) + 50 \cdot 10^9$$

Si ha:

$$1 + B = 0 \Rightarrow B = -1, \quad 40 \cdot 10^3 + C = 0 \Rightarrow C = -40 \cdot 10^3$$

Quindi:

$$V_u(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + 40 \cdot 10^3}{s^2 + 40 \cdot 10^3 s + 50 \cdot 10^9}$$

Consultando le tabelle si ricava:

$$L^{-1} \left[\frac{\omega_n^2}{s \cdot (s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} \right] = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot e^{-\xi\omega_n t} \cdot \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} \cdot t + \varphi) \quad \text{con: } \varphi = \arccos \xi$$

Essendo: $\xi = 0.09 \rightarrow \arccos(0.09) = 84.3^\circ \cong 90^\circ$ e: $\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \cong 1$

Ricordando, infine, che $\sin(\alpha+90^\circ) = \cos \alpha$ si ricava:

$$v_u(t) = 1 - e^{-\xi\omega_n t} \cdot \cos(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} \cdot t)$$

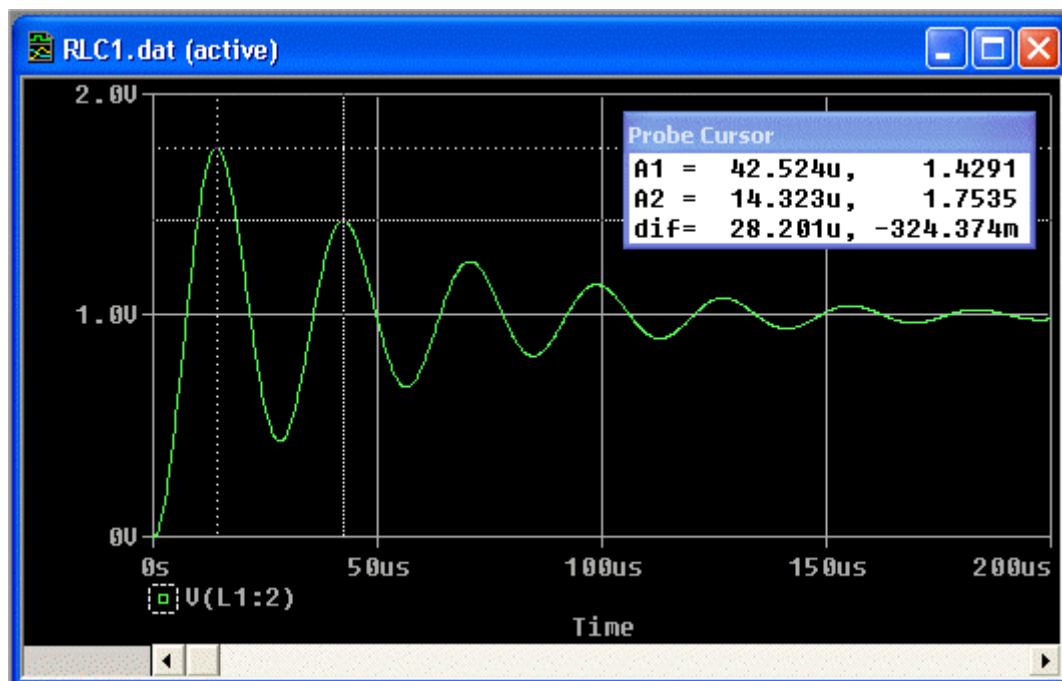


Fig.7 – Risposta al gradino per poli complessi e coniugati.

Nella figura 7 i due cursori, A1 e A2, sono stati inseriti in corrispondenza del primo e del secondo picco.

Il cursore A1 è collocato nell'istante $t_1 = 42.5\mu s$ e il cursore A2 nell'istante $t_2 = 14.3\mu s$.

L'intervallo di tempo $t_1 - t_2 = 28.2\mu s$ rappresenta il periodo di oscillazione smorzata T.

La formula teorica del periodo vale:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_{oscillazione}} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \cong \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{6.28}{223.6 \cdot 10^3} = 28\mu s$$

La sovralongazione massima, intesa come la differenza tra il più alto valore di picco ed il valore di regime, vale:

$$S_{\max} = S_2 = v_u(t_2) - v_{u_regime} = (1 - e^{-\xi \omega_n t_2} \cos \pi) - 1 = e^{-\xi \omega_n t_2}$$

La sovraelongazione corrispondente al punto A1 vale:

$$S_1 = e^{-\xi \omega_n t_1}$$

Il rapporto tra le due sovraelongazioni vale :

$$\frac{S_1}{S_2} = e^{-\xi \omega_n (t_1 - t_2)} = e^{-\xi \omega_n T} = e^{-\xi 2\pi} = e^{-0,09 \cdot 6,28} = e^{-0,5652} = 0,568$$

Si dimostra che i rapporti tra le sovraelongazioni dei picchi successivi è data dalla stessa formula. In laboratorio si è ottenuto: $v_u(t_2) = 1,75V$, $v_u(t_1) = 1,42V$ e quindi:

$$S_2 = 1,75 - 1 = 0,75V, \quad S_1 = 1,42 - 1 = 0,42V$$

$$S_1/S_2 = 0,42/0,75 = 0,56$$

Questo risultato coincide con quello teorico.

Si riporta il listato del programma in ambiente MATLAB per il circuito in esame.

```
% Risposta al gradino di un circuito RLC serie
% uscita su C
% R=400 Ohm ; L=10mH ; C=2nF
n1=[50*1e9]
d1=[1 40*1e3 50*1e9 0]
[r,p,k]=residue(n1,d1)
n2=[50*1e9]
d2=[1 40*1e3 50*1e9]
step(n2,d2)
y=invlaplace(' (50e9/(s*(s^2+40*1e3+50*1e9)) ')
```

Si ottiene:

