Analisi di un sistemi del secondo ordine
Circuito RLC

Si vuole analizzare la risposta di un circuito RLC per diversi valori dello smorzamento.
Si scelgono tre valori di resistenza in corrispondenza dei quali lo smorzamento risulta maggiore di uno, minore di uno , o uguale ad uno.
In quest' ultimo caso la resistenza è detta **resistenza critica.**
Si analizzano tre casi:

- uscita sul condensatore
- uscita sull' induttanza
- uscita sulla resistenza.

Il circuito si comporta come un filtro passa basso, passa alto oppure passa banda.
Ricordiamo che un sistema si dice del secondo ordine se il denominatore D(s) della funzione di trasferimento del circuito è un polinomio di secondo grado in s.
Generalmente esso si esprime nella seguente forma:

$$D(s) = s^2 + 2s\xi\omega_n + \omega_n^{\,2}$$

Oppure:

$$D(s) = s^2 + \frac{\omega_n}{Q}s + \omega_n^{\,2}$$

con ξ, ω_n, e Q positivi.
Sono presenti due poli:

$$p_{1/2} = -\omega_n\left[\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\right]$$

Il termine ω_n è detto pulsazione naturale, il termine ξ è detto smorzamento e Q è detto fattore di merito. E' chiaro che :

$$Q = \frac{1}{2\xi}$$

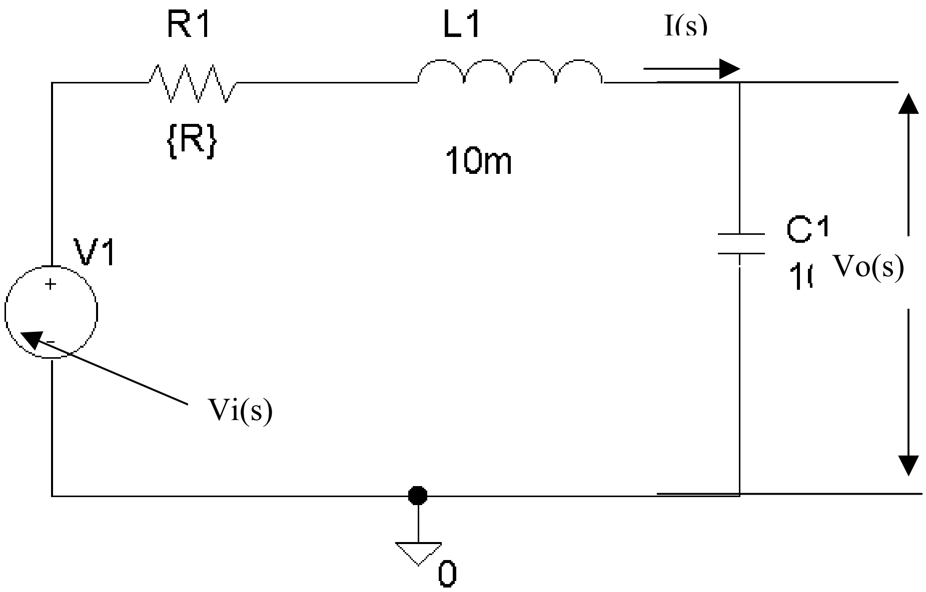
I poli della funzione di trasferimento risultano:

a) reali, distinti e negativi se $\xi>1$,cioè se Q<0,5
b) reali e coincidenti se $\xi=1$, cioè se Q=0,5 (i due poli risultano uguali alla pulsazione naturale)
c) complessi coniugati a parte reale negativa se $\xi<1$ cioè se Q>0,5.

In tutti e tre i casi , comunque , la funzione di trasferimento di un sistema del secondo ordine assume la seguente forma:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{s^2 + 2s\xi\omega_n + \omega_n^{\,2}}$$

Di seguito è riportato il circuito utilizzato per la simulazione in ambiente PSpice:



Si Valuta la funzione di trasferimento G(s):

$$G(s) = \frac{V_O(s)}{V_i(s)}$$

$$V_O(s) = \frac{1}{sC} \cdot I(s)$$

La corrente I(s) risulta essere uguale a:

$$I(s) = \frac{V_i(s)}{R + sL + \frac{1}{sC}}$$

Sostituendo si ha:

$$V_O(s) = \frac{V_i(s) \cdot \frac{1}{sC}}{R + sL + \frac{1}{sC}}$$

Da cui:

$$V_O(s) = \frac{V_i(s)}{s^2CL + sRC + 1}$$

Ovvero:

$$\frac{V_O(s)}{V_i(s)} = G(s) = \frac{K}{s^2 + s\frac{R}{L} + \frac{1}{CL}}$$

dove :

$$K = \frac{1}{CL}$$

Confrontando l' espressione ottenuta (a meno della costante K), con l' espressione generica di un sistema del secondo ordine, si ricava:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{1}{100 \cdot 10^{-12}}} = 10^5 rad / \sec$$

da cui:

$$f_n = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 15{,}9 kHz$$

Inoltre:

$$2\xi\omega_n = \frac{R}{L} = 2\xi\sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Lo smorzamento ξ vale:

$$\xi = \frac{R}{2L}\sqrt{LC}$$

Se si pone lo smorzamento pari ad uno (ξ=1), si ricava il valore della **resistenza critica**:

$$R_C = \frac{2L}{\sqrt{LC}} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{100 \cdot 10^{-12}}} = 2k\Omega$$

In tal caso i poli sono reali e coincidenti e valgono:

$$p_1 = p_2 = -\omega_n$$

Si determina la risposta al gradino unitario:

$$V_O(s) = \frac{E \cdot K}{s(s+\omega_n)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+\omega_n)^2} + \frac{C}{s+\omega_n}$$

Applicando il metodo dei residui si ha:

$$A = \lim_{s \to 0} s \cdot U(s) = \frac{EK}{\omega_n^2}$$

$$B = \lim_{s \to 0} (s + \omega_n)^2 \cdot U(s) = -\frac{K \cdot E}{\omega_n}$$

Poiché la somma dei residui deve valere 0, si ricava:

A+C=0 da cui: C=-A

In definitiva si ha:

$$V_O(s) = \frac{\frac{EK}{\omega_n^2}}{s} - \frac{\frac{EK}{\omega_n}}{(s + \omega_n)^2} - \frac{\frac{EK}{\omega_n^2}}{s + \omega_n}$$

Eseguendo l' antitrasformata di Laplace si ottiene la risposta nel dominio del tempo.

$$v_O(t) = L^{-1}[V_O(s)] = \frac{EK}{\omega_n^2} - \frac{EK}{\omega_n} t \cdot e^{-\omega_n t} - \frac{EK}{\omega_n^2} e^{-\omega_n t}$$

Nel caso in cui il valore della resistenza sia superiore a quello della resistenza critica, si ha che lo smorzamento è maggiore dell' unità (ξ>1).
I poli della funzione di trasferimento valgono:

$$p_1 = -\omega_n \left[\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right]$$
$$p_2 = -\omega_n \left[\xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right]$$

L' equazione della tensione di uscita diventa:

$$V_O(s) = \frac{E \cdot K}{s(s - p_1)(s - p_2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s - p_1)} + \frac{C}{(s - p_2)}$$

Antitrasformando si ottiene la risposta nel dominio del tempo:

$$v_O(t) = L^{-1}[V_O(s)] = A + B \cdot e^{p_1 t} + C \cdot e^{p_2 t}$$

Applicando il metodo dei residui si determina il valore di A , B e C:

$$A = \lim_{s \to 0} s \cdot U(s) = \frac{EK}{(-p_1)(-p_2)} = \frac{EK}{p_1 p_2}$$

$$B = \lim_{s \to p_1} (s - p_1) \cdot U(s) = \frac{EK}{p_1 (p_1 - p_2)} = -\frac{EK}{p_1 (p_2 - p_1)}$$

$$C = \lim_{s \to p_2} (s - p_2) \cdot U(s) = \frac{EK}{p_2 (p_2 - p_1)}$$

Sostituendo i valori ottenuti di A,B e C nell' equazione precedente si ottiene:

$$v_O(t)=L^{-1}[V_O(s)]=\frac{EK}{p_1p_2}-\frac{EK}{p_1(p_2-p_1)}\cdot e^{p_1t}+\frac{EK}{p_2(p_2-p_1)}\cdot e^{p_2t}$$

Si ottiene:

$$v_O(t)=L^{-1}[V_O(s)]=\frac{EK}{p_1p_2}\left(1-\frac{p_2}{(p_2-p_1)}\cdot e^{p_1t}+\frac{p_1}{(p_2-p_1)}\cdot e^{p_2t}\right)$$

Sostituire i valori numerici è possibile determinare l' equazione della risposta nel dominio del tempo.

Il terzo caso , è quello in cui lo smorzamento è minore di 1 (ξ<1).
I poli della funzione di trasferimento sono complessi e coniugati a parte reale negativa e valgono:

$$p_{1/2}=-\omega_n\xi\pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

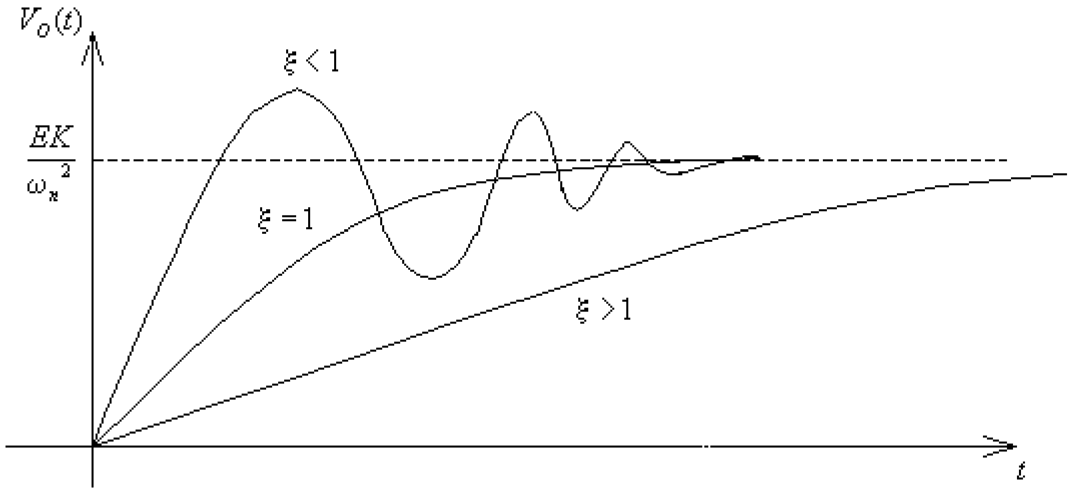
Calcolati i poli , come nei precedenti casi, si antitrasforma il risultato ottenuto.
Tenendo conto delle tabelle delle antitrasformate, la risposta del sistema risulta:

$$v_O(t)=L^{-1}[V_O(s)]=\frac{EK}{\omega_n{}^2}\left[1-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\cdot e^{-\xi\omega_nt}\cdot \mathrm{sen}\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t+\varphi\right)\right]$$

dove φ=arccos ξ

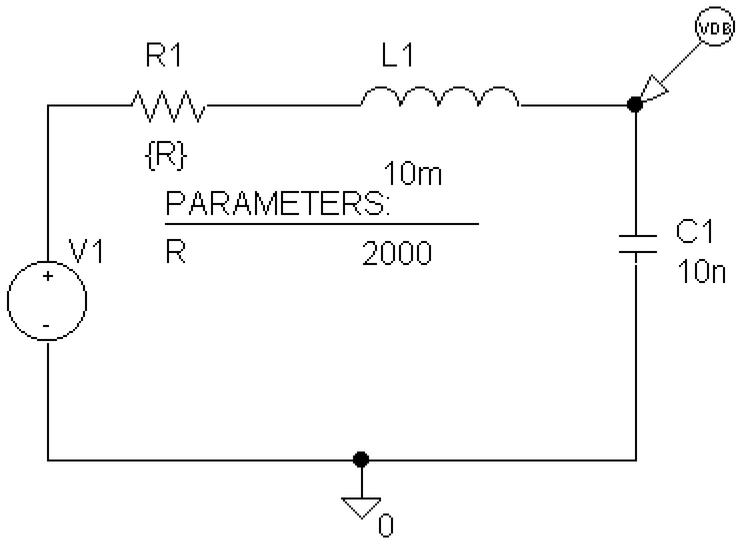
Il termine $\frac{EK}{\omega_n{}^2}$ rappresenta il valore a transitorio esaurito , cioè il valore di regime.
In quest' ultimo caso (poli complessi coniugati), la risposta è oscillatoria smorzata. La risposta presenta un **overshoot**, cioè una sovraoscillazione, prima di assestarsi al valore di regime.
Nel caso di poli reali la risposta è esponenziale pura , senza alcuna oscillazione.

In figura si riportano le risposte nei tre diversi casi di valore dello smorzamento:



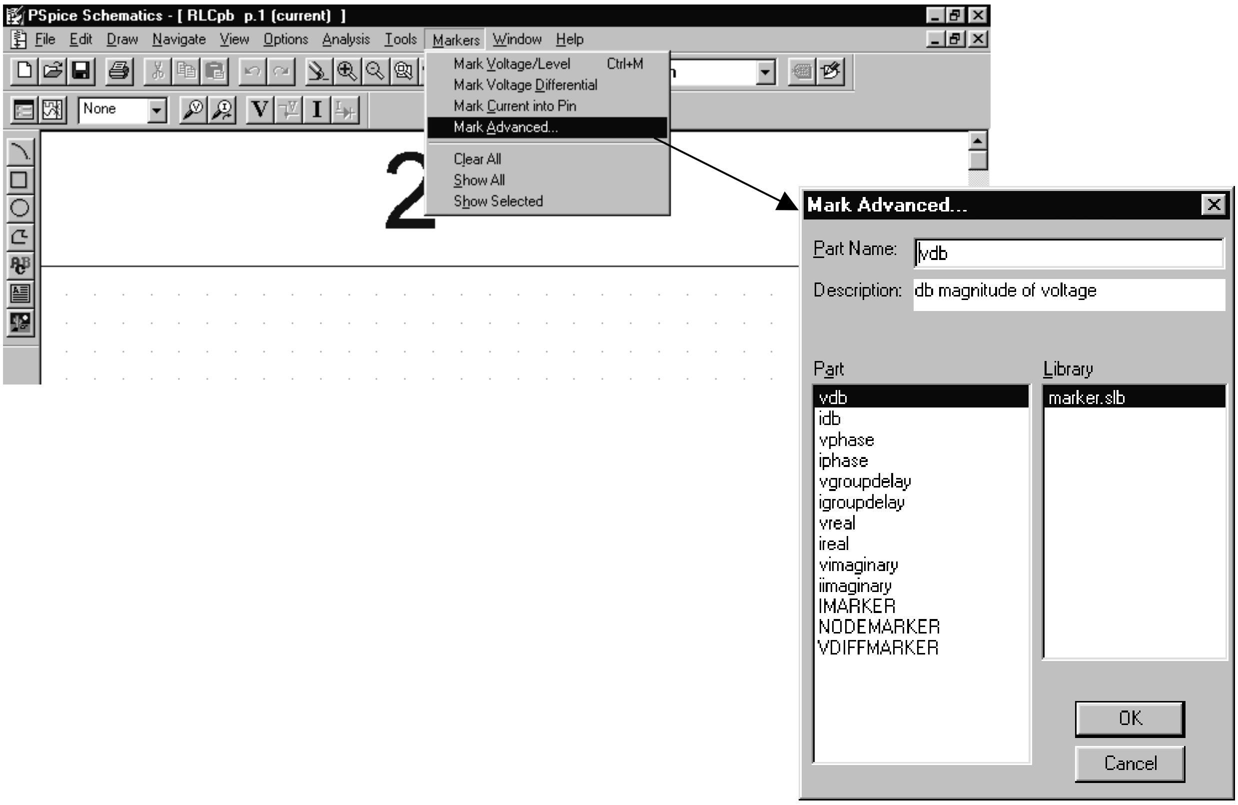
Circuito RLC (uscita sul condensatore)
Diagramma di BODE

Si riporta lo schema del circuito montato con lo Schematics del PSpice:



Il circuito presenta l' uscita sul condensatore ed è da notare che sul condensatore è stato posto un marker "avanzato". Il marker in questione provvede a far visualizzare al probe l' andamento in dB(decibel) del segnale di uscita. Poiché è stata impostata l' analisi nel dominio della frequenza, il software visualizza il diagramma di BODE.

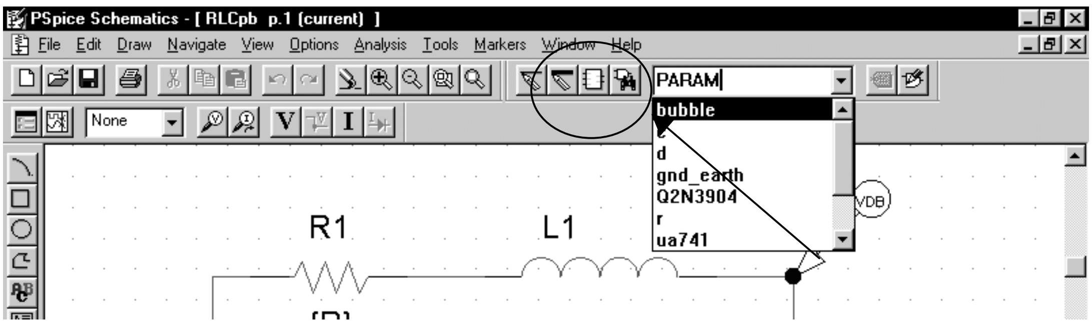
Per attivare questo marker si deve selezionare:
MARKER\ADVANCED\VdB



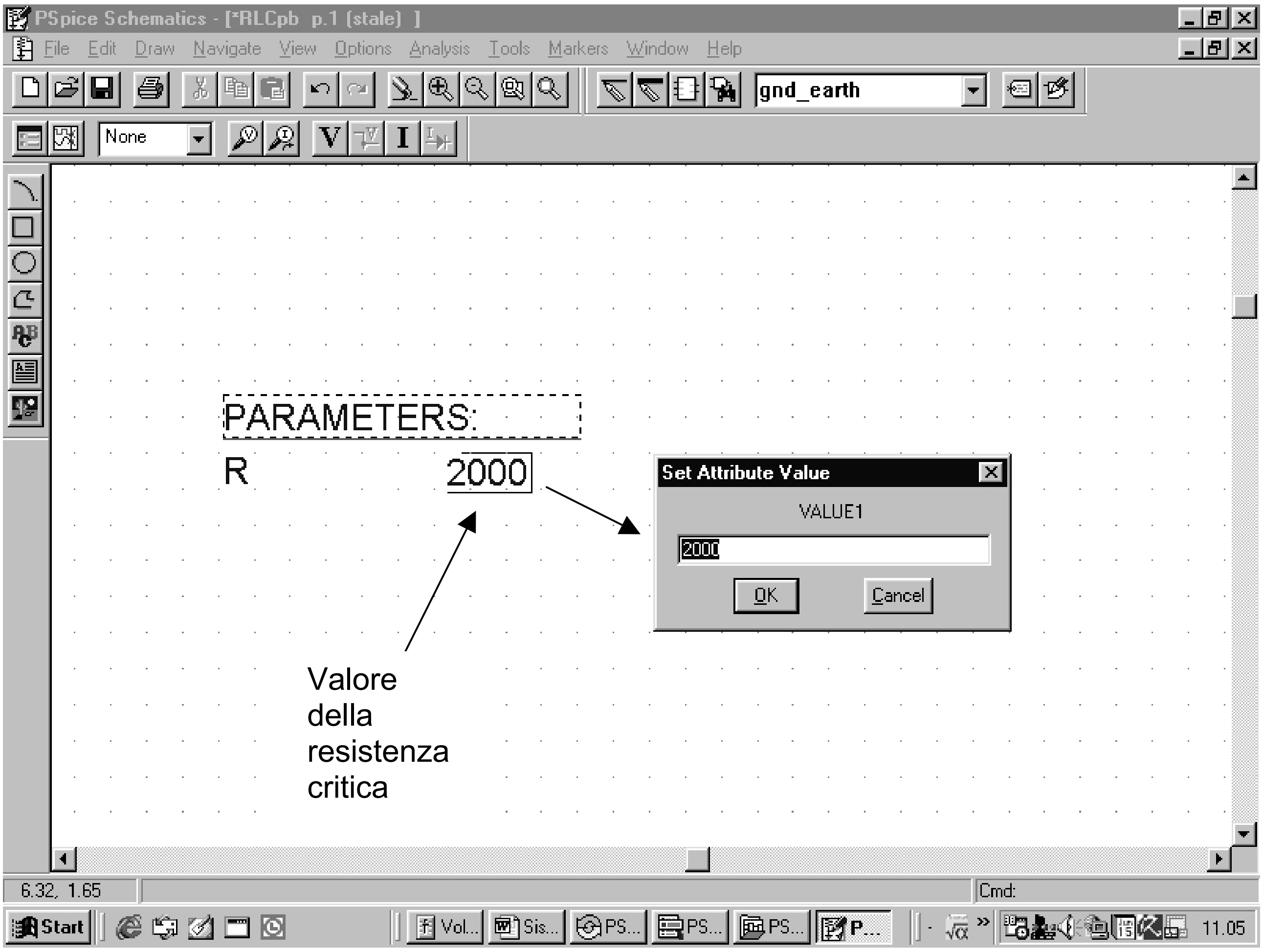
La resistenza è impostata come **parametrica**. Sono stati impostati infatti , tre valori diversi per la resistenza R, in modo da visualizzare il grafico per tre diversi valori di smorzamento. Si pone R pari a:

a) 2kΩ
b) 500Ω
c) 5 kΩ

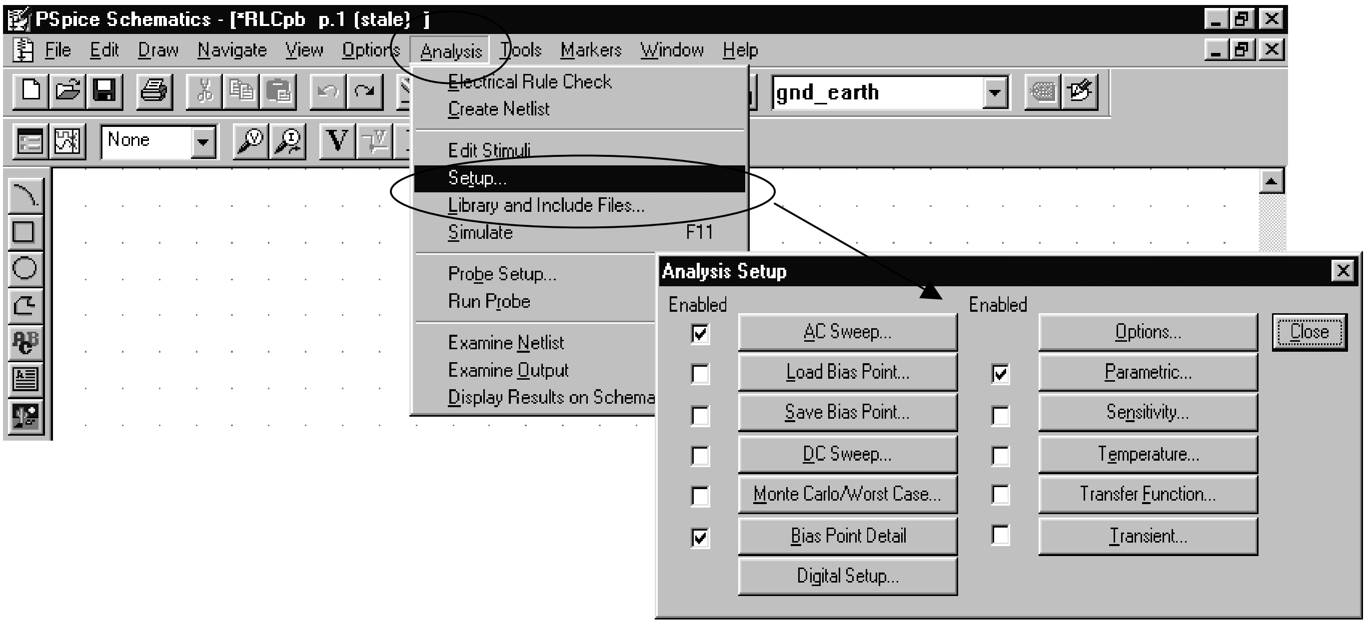
Il valore 2kΩ corrisponde con la resistenza critica (ξ=1) , con 500Ω si ha che ξ<1 mentre con 5kΩ si ha che ξ>1.
Per poter impostare i tre valori della resistenza per la simulazione si procede come segue:



Selezionato il componente **param**, è necessario impostare il valore, come segue:



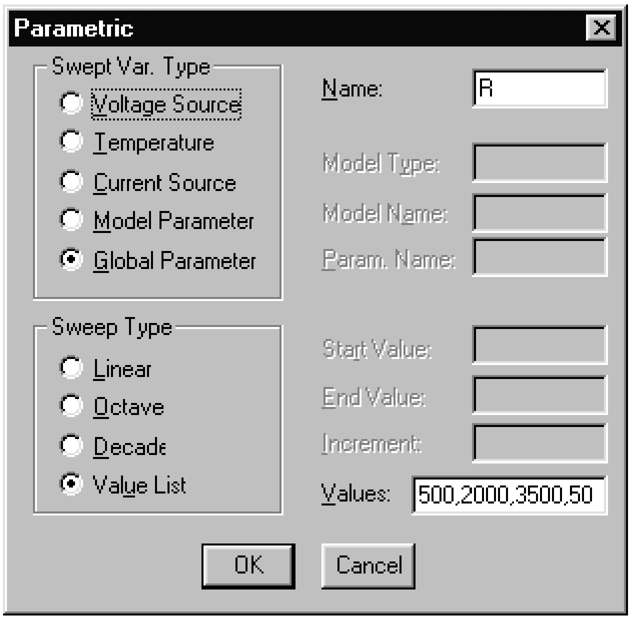
Dal menu **analysis/ setup**, si pone:



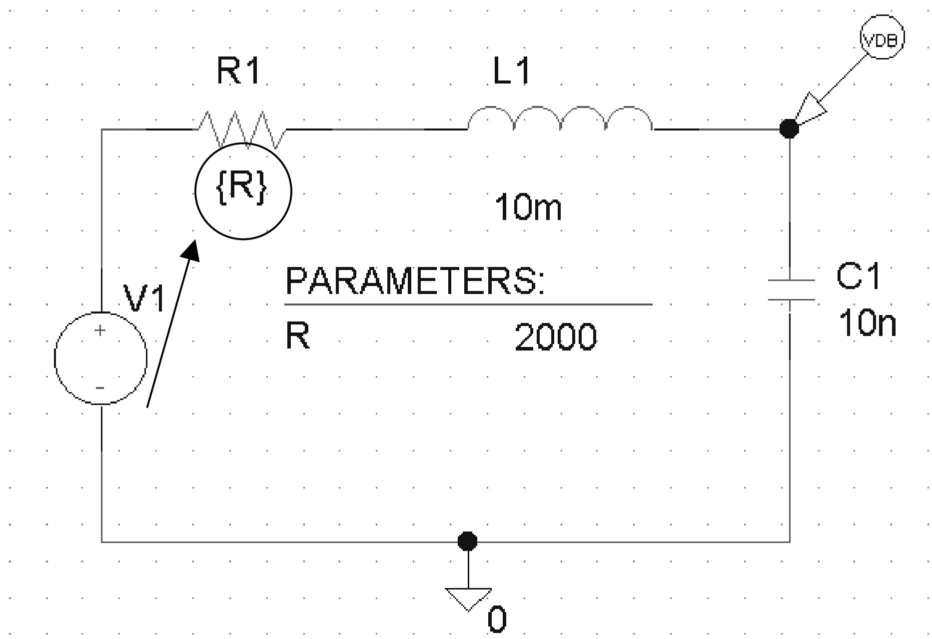
Si seleziona:

Parametric e AC Sweep.

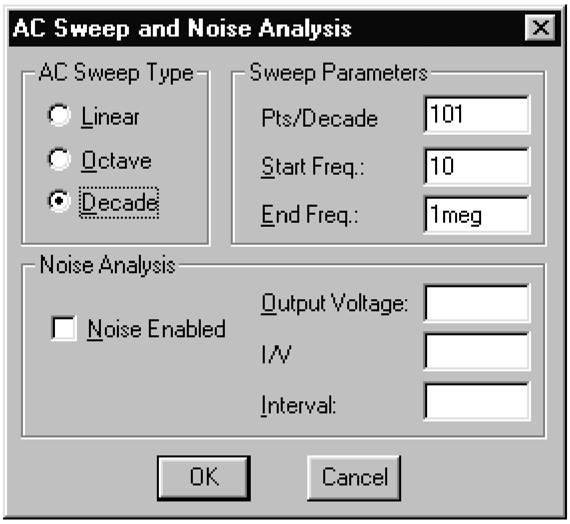
In particolare:



Da **Swept Var. Type** è possibile selezionare il parametro del quale si vuole effettuare l' analisi parametrica. (In questo caso è stato selezionato **global parameter**, poiché la resistenza è vista come un parametro globale del componente). Alla voce **sweep type** (tipo di analisi) si è selezionato **Value List** (lista di valori).
Alla voce **name** bisogna inserire il nome della grandezza sulla quale si intende agire con l' analisi parametrica.



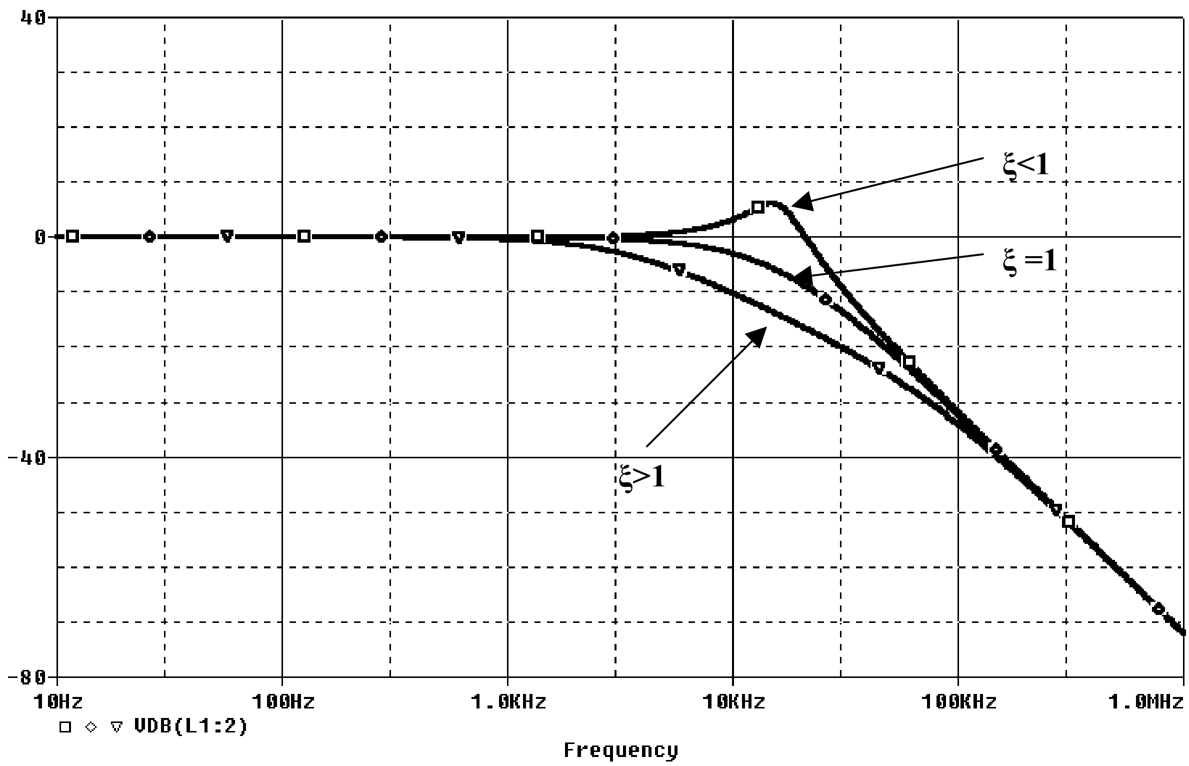
Si analizza **AC Sweep**:



Alla voce **AC Sweep Type** si è selezionata la voce **Decade.** Il software analizza l' uscita in decadi.
Accanto alla voce **Sweep Parameters,** si sono impostati i valori relativi alla simulazione . Le voci di questa finestra sono le seguenti:

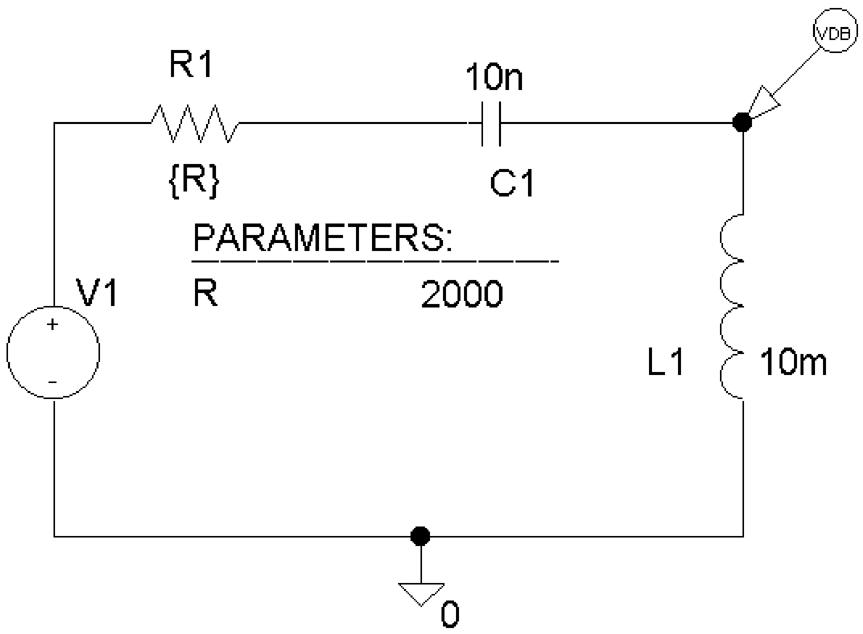
In particolare:.
Start Freq . (Frequenza di inizio) e **End Freq.** (Frequenza finale) : consentono di determinare l' intervallo entro il quale il software và a calcolare i punti relativi alla simulazione.

La simulazione fornisce la seguente risposta, tipica di un filtro passa-basso.

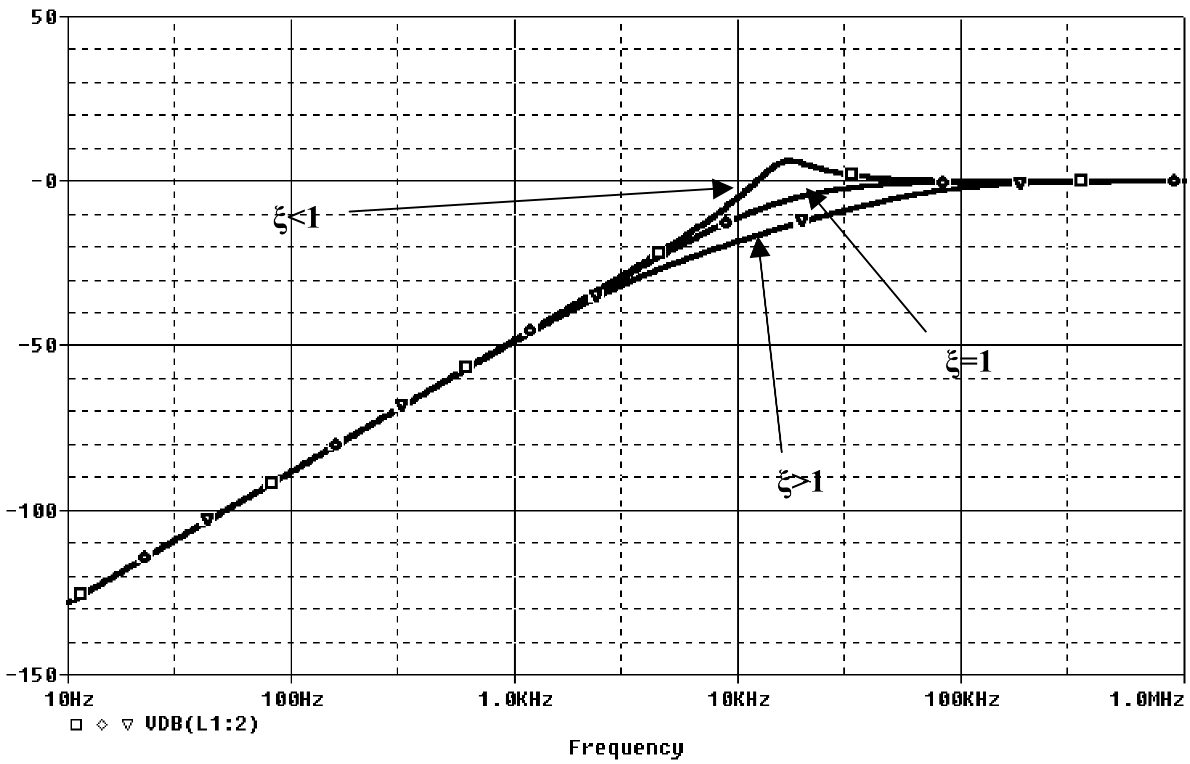


Circuito RLC (uscita sull' induttanza)

Lo schema montato con il PSpice è il seguente:



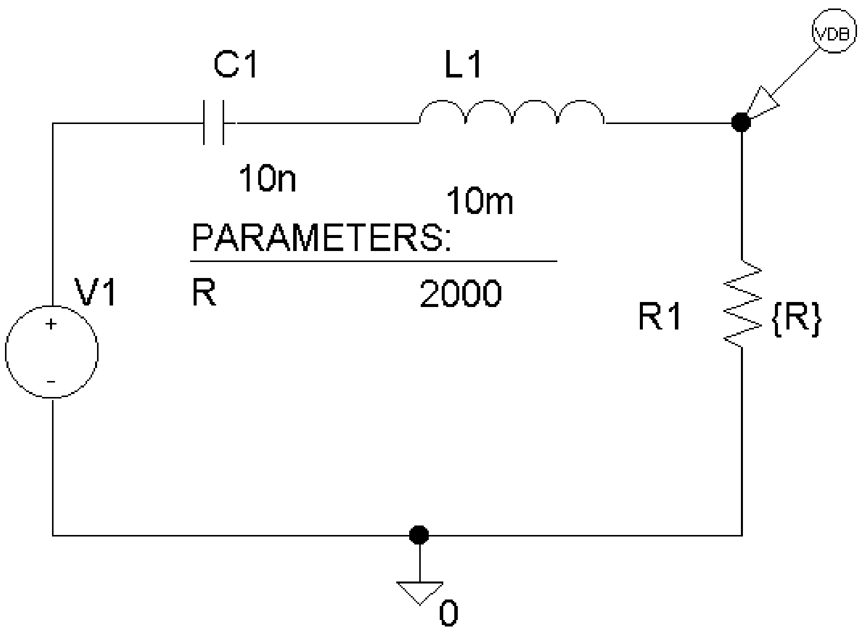
Il circuito presenta gli stessi componenti del circuito precedente.
Il marker VdB và posizionato sull' induttanza. Seguendo gli stessi procedimenti effettuati precedentemente, sia per l' impostazione dei valori dei componenti , sia per i valori di simulazione si ottiene:



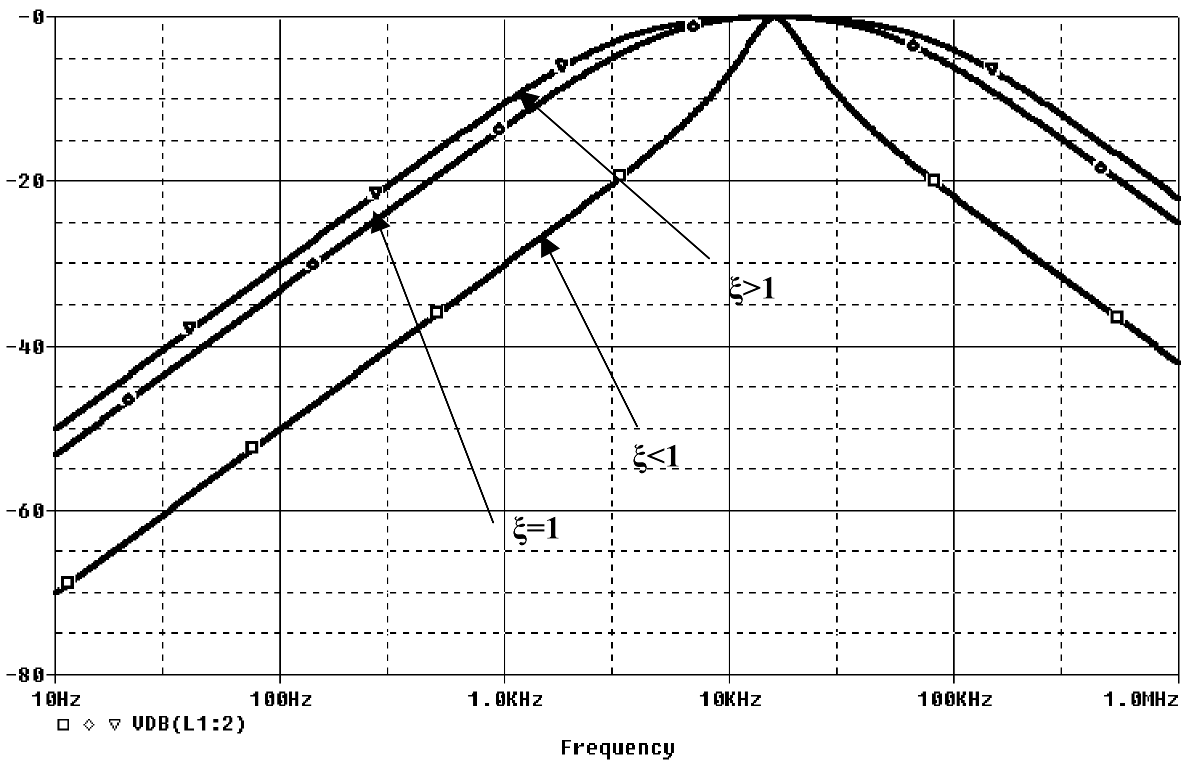
Il circuito si comporta come un filtro passa-alto. Anche in questo caso , per valori di smorzamento uguali o maggiori dell’ unità, la risposta è un esponenziale pura.
Se lo smorzamento è minore di uno , la risposta presenta un oscillazione.

Circuito RLC (Uscita sulla resistenza)

Il circuito montato con il Pspice è il seguente:



Dopo analoghe considerazioni , il software fornisce la seguente risposta:



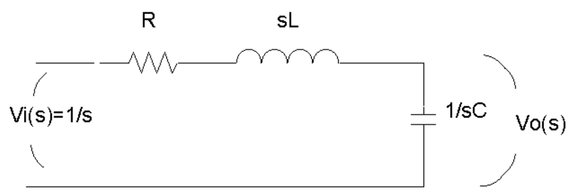
.

Simulazione in ambiente MATLAB

Per poter effettuare la simulazione in ambiente Matlab , è necessario calcolare la funzione di trasferimento del circuito nei 3 diversi casi:

FILTRO PASSA-BASSO

In ambiente Matlab , per visualizzare il diagramma di Bode o qualsiasi altro diagramma o grafico di una funzione si può utilizzare il comando '**ltiview**'. Tale comando apre una finestra che consente di scegliere il grafico da visualizzare (diagramma di Bode, diagramma di Nyquist, diagramma pole-zero, ecc….).
Si ha:



$$G(s) = \frac{V_O(s)}{V_i(s)}$$

$$V_O(s) = \frac{1}{sC} \cdot i(s)$$

$$\mathrm{I(s)} = \frac{\mathrm{V_i(s)}}{\mathrm{R + sL} + \frac{1}{\mathrm{sC}}}$$

$$V_O(s) = \frac{V_i(s) \cdot \frac{1}{sC}}{R + sL + \frac{1}{sC}}$$

$$V_O(s) = \frac{V_i(s)}{s^2 CL + sRC + 1}$$

$$\frac{V_O(s)}{V_i(s)} = G(s) = \frac{K}{s^2 + s\frac{R}{L} + \frac{1}{CL}}$$

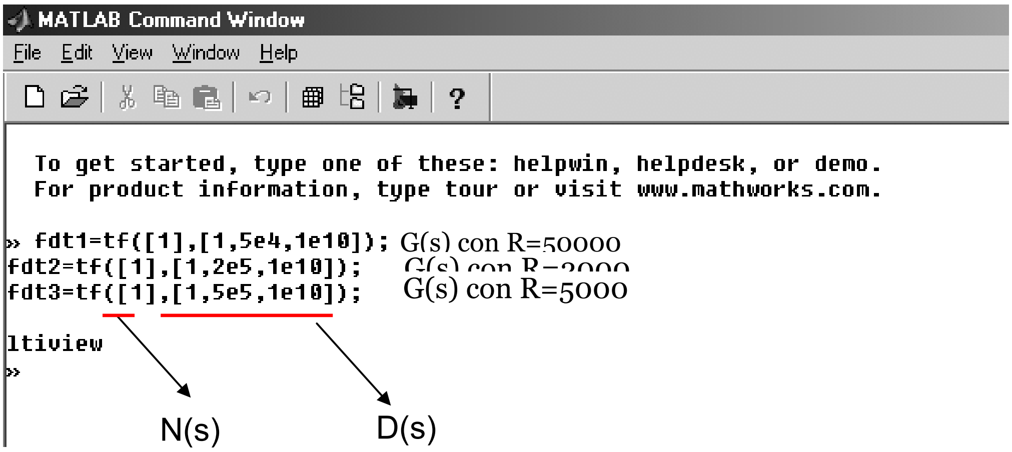
$$K = \frac{1}{CL}$$

$$\omega_n{}^2 = \frac{1}{LC}$$

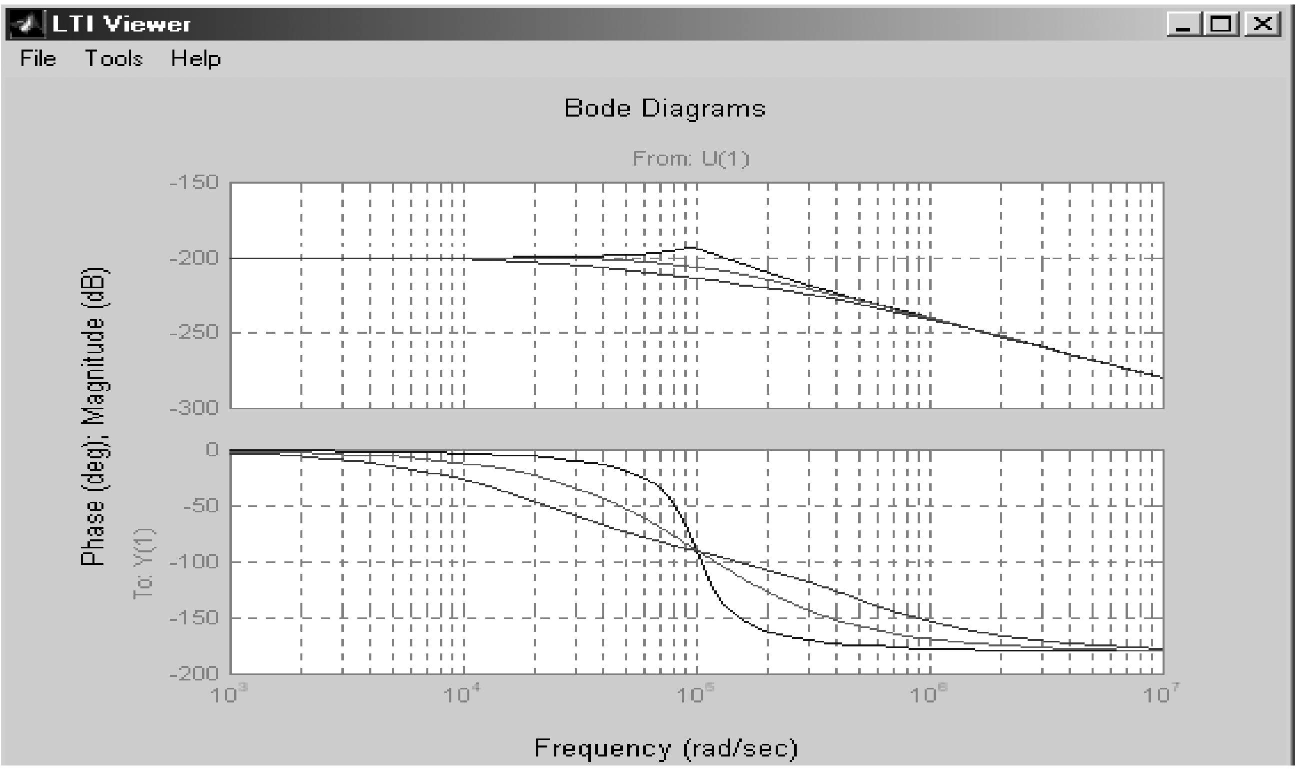
$$2\xi\omega_n = \frac{R}{L}$$

Sostituendo i valori numerici si rica la funzione di trasferimento per i tre casi in esame.

Dopo aver lanciato MATLAB si inseriscono le tre funzioni di trasferimento come di seguito:

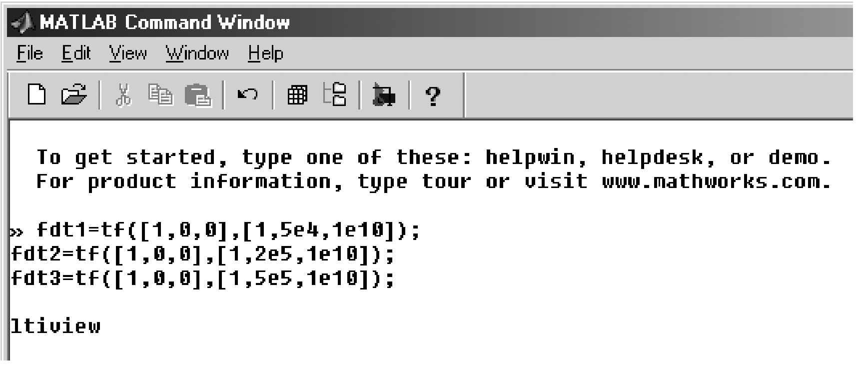


Il comando **ltiview** apre l'ambiente LTI Viewer per la scelta della risposta.
Per il diagramma di BODE si ha:

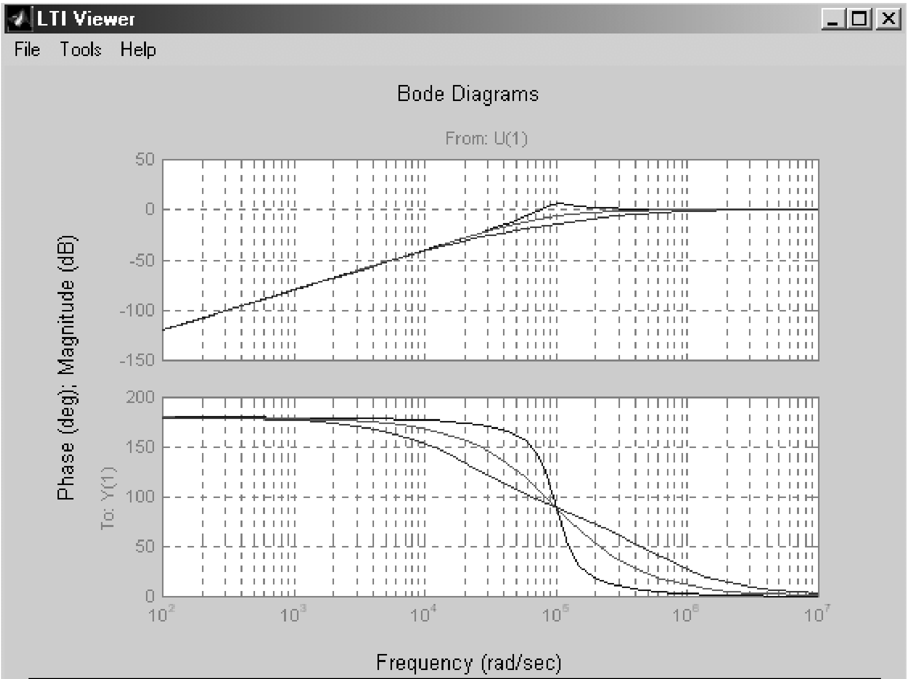


FILTRO PASSA ALTO

Per il passa – alto si ha:



1



FILTRO PASSA BANDA

Si ricava: