Filtri con la trasformata Z

Filtro passa – basso del primo ordine

$$G(s) = \frac{\omega_t}{s + \omega_t} = \frac{1}{\frac{s}{\omega_t} + 1}$$

Applicando la sostituzione di Tustin:

$$s = \frac{2}{T_c} \cdot \frac{z-1}{z+1}$$

$$G(z) = \frac{1}{\frac{2}{\omega_t \cdot T_c} \cdot \frac{z-1}{z+1} + 1} = \frac{z+1}{a \cdot (z-1) + (z+1)}$$

Ove:

$$a = \frac{2}{\omega_t \cdot T_c} = \frac{{f_c}/{f_t}}{\pi} > \frac{2}{\pi} = 0.636\ (Per\ Shannon)$$

$$\boldsymbol{G(z) = \frac{z+1}{z \cdot (1+a) + \ (1-a)}}$$

Si ricava l'equazione agli incrementi finiti:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z+1}{z \cdot (1+a) + \ (1-a)} = \frac{1 + z^{-1}}{1 + a + (1-a) \cdot z^{-1}}$$

Da cui:

$$Y(z) \cdot (1+a) + Y(z) \cdot z^{-1} \cdot (1-a) = X(z) + X(z) \cdot z^{-1}$$

Antitrasformando entrambi i membri:

$$y(n) \cdot (1+a) + y(n-1) \cdot (1-a) \ = \ x(n) + x(n-1)$$

da cui:

$$\boldsymbol{y(n) = \frac{a-1}{a+1} y(n-1) + \frac{x(n) + x(n-1)}{a+1}}$$

Esempio:

a=10 (buon campionamento):

$$G(z) = \frac{z+1}{11z - 9} \qquad\qquad y(n) = \frac{9}{11} \cdot y(n-1) + \frac{x(n) + x(n-1)}{11}$$

Se ω_t = 1Krad/s, allora: Tc = 2/(ω_t·a) = 0.2ms

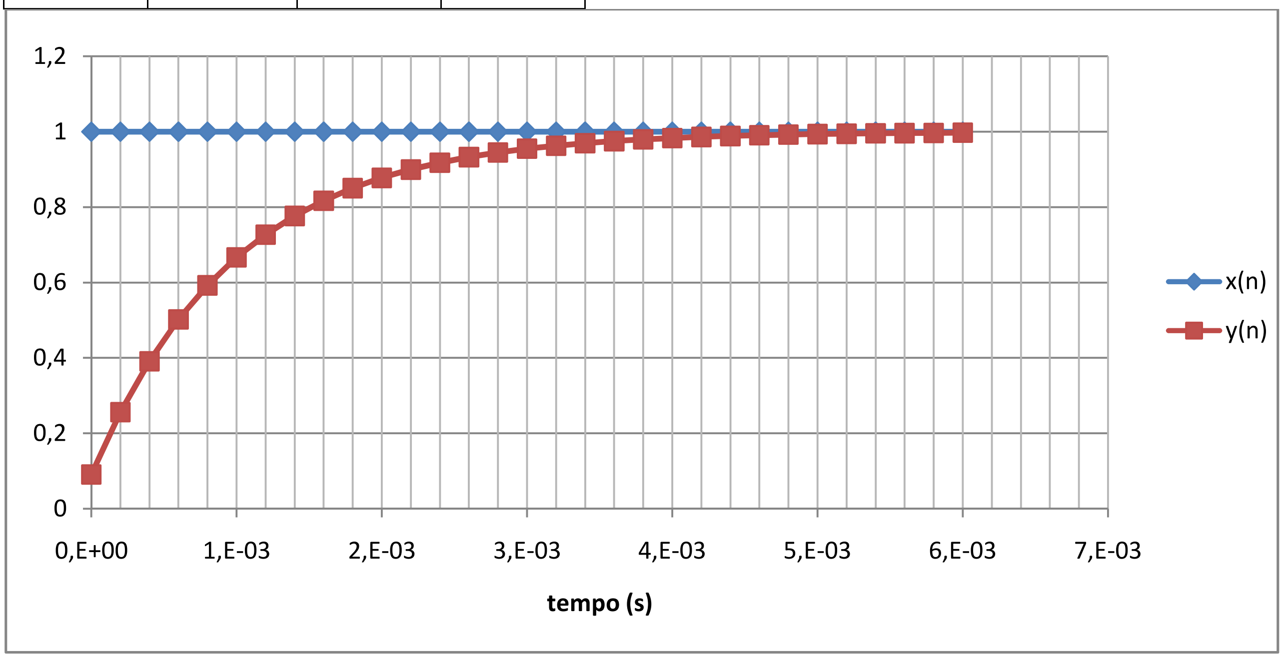
Si riporta una tabella Excel con 15 campioni calcolati:

n	n*Tc	x(n)	y(n)	Tc=	2,00E-04
-1	-0,0002	0	0,00000	wt=	1,00E+03
0	0,0000	1	0,09091	a=2/(Tc*wt)=	10
1	0,0002	1	0,25620	**a (imposto)=**	**10**
2	0,0004	1	0,39144		
3	0,0006	1	0,50208		
4	0,0008	1	0,59261		
5	0,0010	1	0,66668		
6	0,0012	1	0,72729		
7	0,0014	1	0,77687		
8	0,0016	1	0,81744		
9	0,0018	1	0,85063		
10	0,0020	1	0,87779		
11	0,0022	1	0,90001		
12	0,0024	1	0,91819		
13	0,0026	1	0,93306		
14	0,0028	1	0,94523		
15	0,0030	1	0,95519		

Filtro passa basso del I ordine

con formule iterative ricavate dalla trasformata Z

Risposta al gradino



Filtro passa – alto del primo ordine

$$G(s) = \frac{s}{s+\omega_t} = \frac{\frac{s}{\omega_t}}{\frac{s}{\omega_t}+1}$$

Applicando la sostituzione di Tustin:

$$s = \frac{2}{T_c} \cdot \frac{z-1}{z+1}$$

$$G(z) = \frac{\frac{2}{\omega_t \cdot T_c} \cdot \frac{z-1}{z+1}}{\frac{2}{\omega_t \cdot T_c} \cdot \frac{z-1}{z+1}+1} = \frac{a \cdot (z-1)}{a \cdot (z-1) + (z+1)}$$

Ove:

$$a = \frac{2}{\omega_t \cdot T_c} = \frac{f_c/f_t}{\pi} > \frac{2}{\pi} = 0.636\ (Per\ Shannon)$$

$$\boldsymbol{G(z) = \frac{a \cdot z - a}{z \cdot (1+a) + \ (1-a)}}$$

Si ricava l’equazione agli incrementi finiti:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a \cdot z - a}{z \cdot (1+a) + \ (1-a)} = \frac{a - a \cdot z^{-1}}{1 + a + (1-a) \cdot z^{-1}}$$

Da cui:

$$Y(z) \cdot (1+a) + Y(z) \cdot z^{-1} \cdot (1-a) = a \cdot X(z) - a \cdot X(z) \cdot z^{-1}$$

Antitrasformando entrambi i membri:

$$y(n) \cdot (1+a) + y(n-1) \cdot (1-a) \ = \ a[x(n) + x(n-1)]$$

da cui:

$$\boldsymbol{y(n) = \frac{a-1}{a+1} y(n-1) + \frac{a}{a+1}[x(n) - x(n-1)]}$$

Esempio:

a=10 (buon campionamento):

$$G(z) = \frac{10z-10}{11z-9} \qquad\qquad y(n) = \frac{9}{11} \cdot y(n-1) + \frac{10}{11}[x(n) - x(n-1)]$$

Se ω_t = 1Krad/s allora: Tc = 2/(ω_t·a) = 0.2ms

Si riporta una tabella Excel con 15 campioni calcolati:

n	n*Tc	x(n)	y(n)
-1	-0,0002	0	0,00000
0	0,0000	1	0,90909
1	0,0002	1	0,74380
2	0,0004	1	0,60856
3	0,0006	1	0,49792
4	0,0008	1	0,40739
5	0,0010	1	0,33332
6	0,0012	1	0,27271
7	0,0014	1	0,22313
8	0,0016	1	0,18256
9	0,0018	1	0,14937
10	0,0020	1	0,12221
11	0,0022	1	0,09999
12	0,0024	1	0,08181
13	0,0026	1	0,06694
14	0,0028	1	0,05477
15	0,0030	1	0,04481

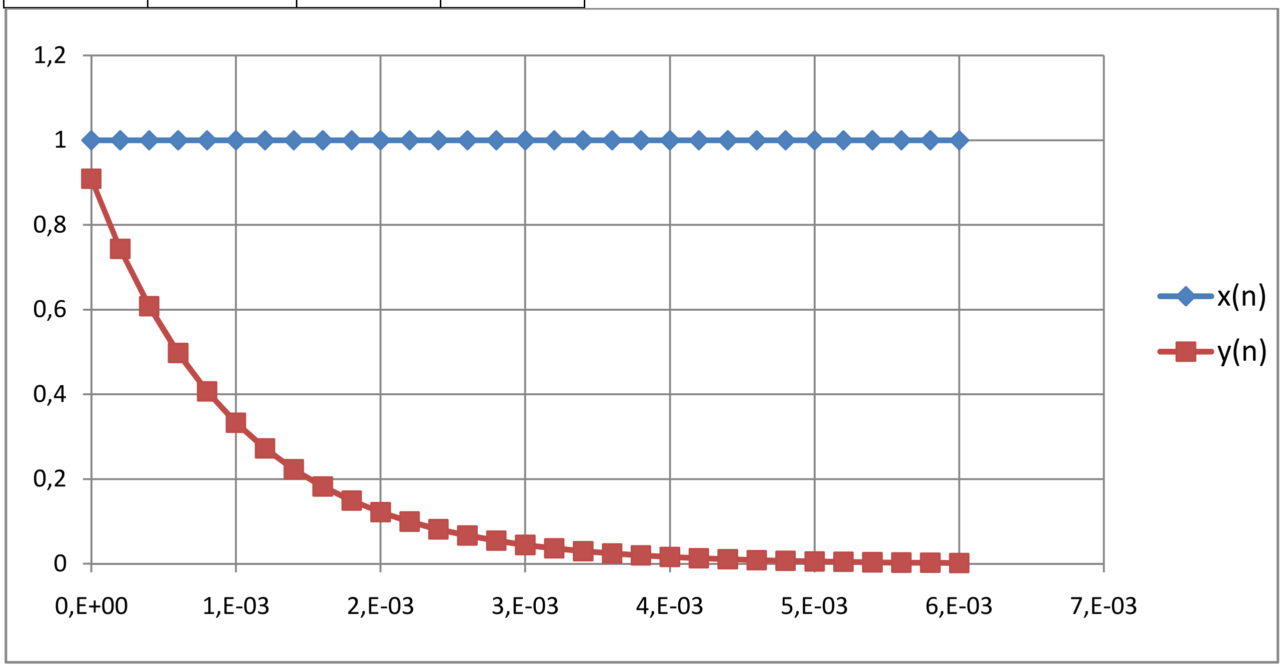
Tc=	2,00E-04
wt=	1,00E+03
a=2/(Tc*wt)=	10

a (imposto)= 10

Filtro passa alto del I ordine

con formule iterative ricavate dalla trasformata Z

Risposta al gradino



Filtro passa – basso del secondo ordine

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi s}{\omega_n} + 1}$$

Applicando la sostituzione di Tustin:

$$s = \frac{2}{T_c} \cdot \frac{z-1}{z+1}$$

e ponendo:

$$a = \frac{2}{\omega_t \cdot T_c} = \frac{{}^{f_c}/_{f_t}}{\pi} > \frac{2}{\pi} = 0.636\ (Per\ Shannon)$$

$$G(z) = \frac{1}{a^2 \cdot \frac{(z-1)^2}{(z+1)^2} + 2\xi a \frac{z-1}{z+1} + 1} = \frac{z^2 + 2z + 1}{a^2(z^2 - 2z + 1) + 2\xi a(z^2 - 1) + (z^2 + 2z + 1)}$$

Dopo alcuni passaggi si ottiene:

$$\boldsymbol{G(z) = \frac{z^2 + 2z + 1}{z^2 \cdot (a^2 + 2\xi a + 1) + z(2 - 2a^2) + (a^2 - 2\xi a + 1)}}$$

Si ricava l'equazione agli incrementi finiti:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^2 + 2z + 1}{z^2 \cdot \alpha + z \cdot \beta + \gamma} = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{\alpha + \beta \cdot z^{-1} + \gamma \cdot z^{-2}}$$

$$ove: \quad \alpha = a^2 + 2\xi a + 1; \quad \beta = 2 - 2a^2; \quad \gamma = a^2 - 2\xi a + 1$$

Da cui:

$$Y(z) \cdot (\alpha + \beta \cdot z^{-1} + \gamma \cdot z^{-2}) = X(z) \cdot (1 + 2z^{-1} + z^{-2})$$

Antitrasformando entrambi i membri si ottiene:

$$\boldsymbol{y(n) = \frac{-\beta}{\alpha} y(n-1) - \frac{\gamma}{\alpha} y(n-2) + \frac{x(n) + 2x(n-1) + x(n-2)}{\alpha}}$$

Esempio:

a=10 (buon campionamento) e $\xi = 0.5$ (risposta con oscillazioni smorzate)

$$\alpha = 111; \quad \beta = -198; \quad \gamma = 91$$

$$G(z) = \frac{z^2 + 2z + 1}{111z^2 - 198z + 91}\ ; \ \ y(n) = \frac{198}{111} \cdot y(n-1) - \frac{91}{111} \cdot y(n-2) + \frac{x(n) + 2x(n-1) + 2x(n-2)}{111}$$

Se ω_n = 1Krad/s allora: Tc = 2/(ω_n·a) = 0.2ms. Si riporta una tabella Excel con 20 valori calcolati.

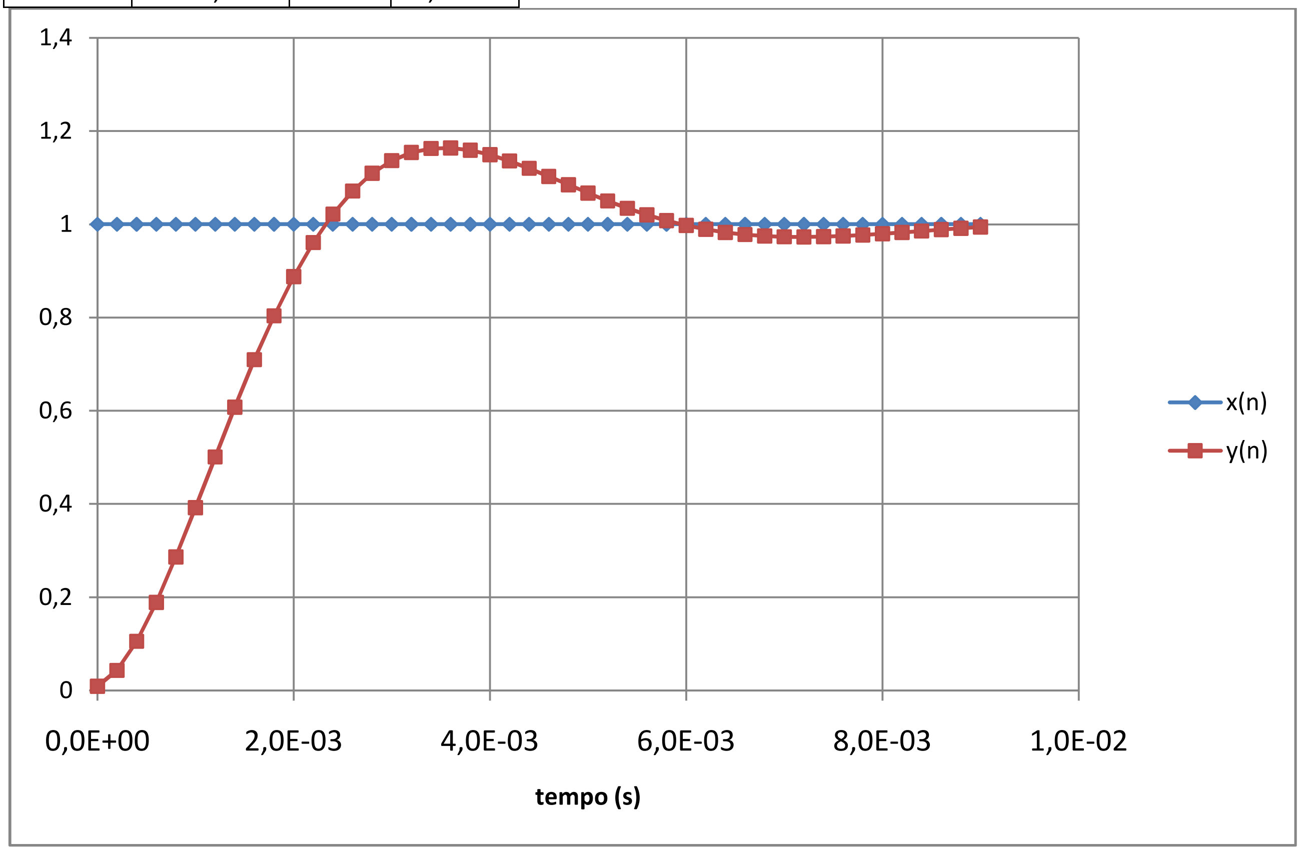
n	n*Tc	x(n)	y(n)
-2	-0,0004	0	0,00000
-1	-0,0002	0	0,00000
0	0,0000	1	0,00901
1	0,0002	1	0,04310
2	0,0004	1	0,10553
3	0,0006	1	0,18894
4	0,0008	1	0,28655
5	0,0010	1	0,39229
6	0,0012	1	0,50087
7	0,0014	1	0,60787
8	0,0016	1	0,70973
9	0,0018	1	0,80369
10	0,0020	1	0,88780
11	0,0022	1	0,96079
12	0,0024	1	1,02205
13	0,0026	1	1,07148
14	0,0028	1	1,10942
15	0,0030	1	1,13658
16	0,0032	1	1,15393
17	0,0034	1	1,16261
18	0,0036	1	1,16386
19	0,0038	1	1,15898
20	0,0040	1	1,14925

Tc=	2,00E-04
ω_n=	1,00E+03
a=2/(Tc*ω_n)=	10

a (imposto)= 10

Filtro passa basso del II ordine
con formule iterative ricavate dalla trasformata Z
Risposta al gradino

ξ=	0,5
α=	111
β=	-198
γ=	91



Filtro passa – alto del secondo ordine

$$G(s) = \frac{s^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\frac{s^2}{\omega_n^2}}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi s}{\omega_n} + 1}$$

Applicando la sostituzione di Tustin:

$$s = \frac{2}{T_c} \cdot \frac{z-1}{z+1}$$

e ponendo:

$$a = \frac{2}{\omega_t \cdot T_c} = \frac{f_c/f_t}{\pi} > \frac{2}{\pi} = 0.636\ (Per\ Shannon)$$

$$G(z) = \frac{a^2 \cdot \frac{(z-1)^2}{(z+1)^2}}{a^2 \cdot \frac{(z-1)^2}{(z+1)^2} + 2\xi a \frac{z-1}{z+1} + 1} = a^2 \cdot \frac{z^2 - 2z + 1}{a^2(z^2 - 2z + 1) + 2\xi a(z^2 - 1) + (z^2 + 2z + 1)}$$

Dopo alcuni passaggi si ottiene:

$$\boldsymbol{G(z) = a^2 \cdot \frac{z^2 - 2z + 1}{z^2 \cdot (a^2 + 2\xi a + 1) + z(2 - 2a^2) + (a^2 - 2\xi a + 1)}}$$

Si ricava l'equazione agli incrementi finiti:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = a^2 \cdot \frac{z^2 - 2z + 1}{z^2 \cdot \alpha + z \cdot \beta + \gamma} = a^2 \cdot \frac{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}{\alpha + \beta \cdot z^{-1} + \gamma \cdot z^{-2}}$$

$$ove: \quad \alpha = a^2 + 2\xi a + 1; \quad \beta = 2 - 2a^2; \quad \gamma = a^2 - 2\xi a + 1$$

Da cui:

$$Y(z) \cdot (\alpha + \beta \cdot z^{-1} + \gamma \cdot z^{-2}) = X(z) \cdot a^2 \cdot (1 - 2z^{-1} + z^{-2})$$

Antitrasformando entrambi i membri si ottiene:

$$\boldsymbol{y(n) = \frac{-\beta}{\alpha} y(n-1) - \frac{\gamma}{\alpha} y(n-2) + \frac{a^2}{\alpha}[x(n) - 2x(n-1) + x(n-2)]}$$

Esempio:

a=10 (buon campionamento) e $\xi = 0.5$ (risposta con oscillazioni smorzate)

$$\alpha = 111; \quad \beta = -198; \quad \gamma = 91$$

$$G(z) = \frac{100(z^2 - 2z + 1)}{111z^2 - 198z + 91}\ ; \ \ y(n) = \frac{198}{111} \cdot y(n-1) - \frac{91}{111} \cdot y(n-2) + \frac{100}{111}[x(n) - 2x(n-1) + 2x(n-2)]$$

Se ω_n = 1Krad/s allora: Tc = 2/(ω_n·a) = 0.2ms. Si riporta una tabella Excel con 20 valori calcolati.

n	n*Tc	x(n)	y(n)
-2	-0,0004	0	0,00000
-1	-0,0002	0	0,00000
0	0,0000	1	0,90090
1	0,0002	1	0,70611
2	0,0004	1	0,52097
3	0,0006	1	0,35042
4	0,0008	1	0,19797
5	0,0010	1	0,06585
6	0,0012	1	-0,04483
7	0,0014	1	-0,13396
8	0,0016	1	-0,20220
9	0,0018	1	-0,25085
10	0,0020	1	-0,28171
11	0,0022	1	-0,29685
12	0,0024	1	-0,29856
13	0,0026	1	-0,28921
14	0,0028	1	-0,27112
15	0,0030	1	-0,24652
16	0,0032	1	-0,21747
17	0,0034	1	-0,18582
18	0,0036	1	-0,15317
19	0,0038	1	-0,12089
20	0,0040	1	-0,09006

Tc=	2,00E-04
ω_n=	1,00E+03
$a=2/(Tc*\omega_n)$=	10

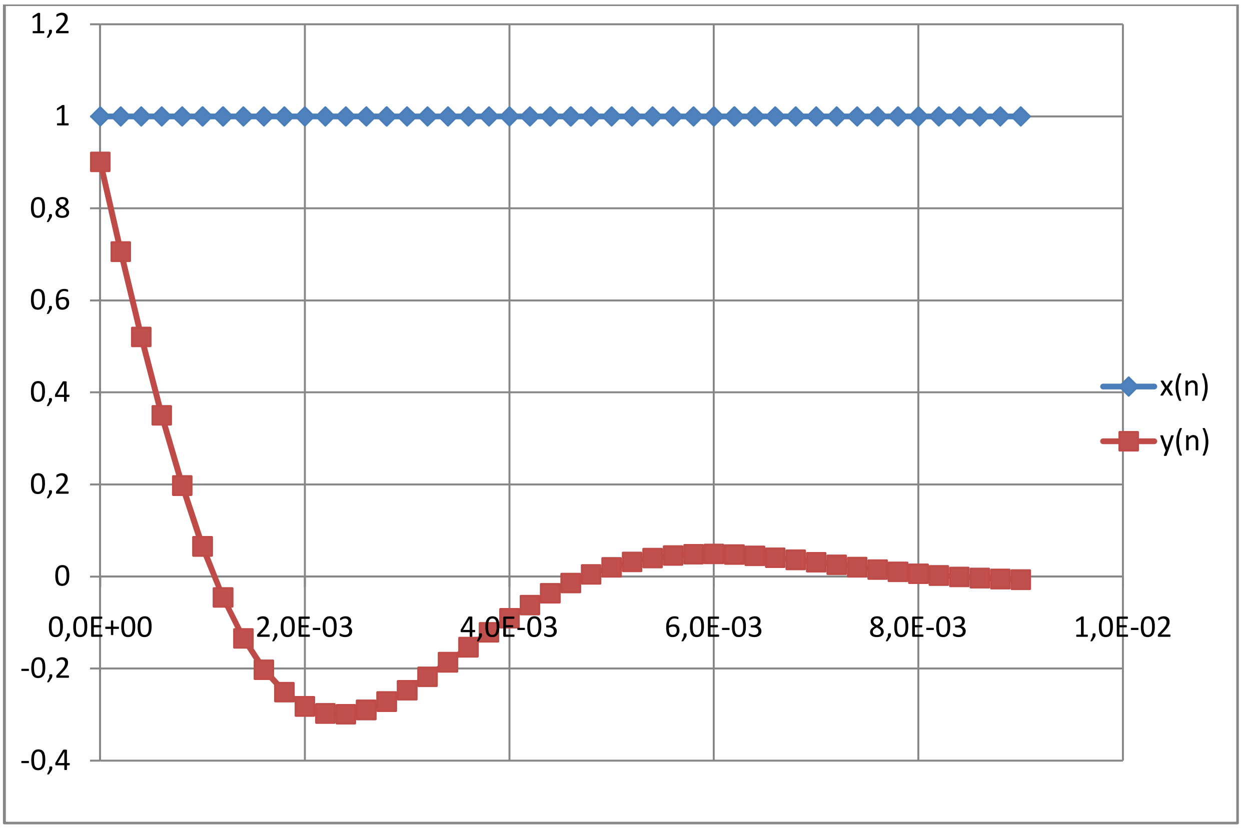
a (imposto)= 10

Filtro passa alto del II ordine

con formule iterative ricavate dalla trasformata Z

Risposta al gradino

ξ=	0,5
α=	111
β=	-198
γ=	91



Filtro passa – banda del secondo ordine

$$G(s) = \frac{\omega_n s}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\frac{s}{\omega_n}}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi s}{\omega_n} + 1}$$

Applicando la sostituzione di Tustin:

$$s = \frac{2}{T_c} \cdot \frac{z-1}{z+1}$$

e ponendo:

$$a = \frac{2}{\omega_n \cdot T_c} = \frac{f_c/f_n}{\pi} > \frac{2}{\pi} = 0.636\ (Per\ Shannon)$$

$$G(z) = \frac{a \cdot \frac{z-1}{z+1}}{a^2 \cdot \frac{(z-1)^2}{(z+1)^2} + 2\xi a \frac{z-1}{z+1} + 1} = a \cdot \frac{z^2 - 1}{a^2(z^2 - 2z + 1) + 2\xi a(z^2 - 1) + (z^2 + 2z + 1)}$$

Dopo alcuni passaggi si ottiene:

$$\boldsymbol{G(z) = a \cdot \frac{z^2 - 1}{z^2 \cdot (a^2 + 2\xi a + 1) + z(2 - 2a^2) + (a^2 - 2\xi a + 1)}}$$

Si ricava l'equazione agli incrementi finiti:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = a \cdot \frac{z^2 - 1}{z^2 \cdot \alpha + z \cdot \beta + \gamma} = a \cdot \frac{1 - z^{-2}}{\alpha + \beta \cdot z^{-1} + \gamma \cdot z^{-2}}$$

$$ove: \quad \alpha = a^2 + 2\xi a + 1; \quad \beta = 2 - 2a^2; \quad \gamma = a^2 - 2\xi a + 1$$

Da cui:

$$Y(z) \cdot (\alpha + \beta \cdot z^{-1} + \gamma \cdot z^{-2}) = X(z) \cdot a \cdot (1 - z^{-2})$$

Antitrasformando entrambi i membri si ottiene:

$$\boldsymbol{y(n) = \frac{-\beta}{\alpha} y(n-1) - \frac{\gamma}{\alpha} y(n-2) + \frac{a}{\alpha}[x(n) - x(n-2)]}$$

Esempio:

a=10 (buon campionamento) e $\xi = 0.5$ (risposta con oscillazioni smorzate)

$$\alpha = 111; \quad \beta = -198; \quad \gamma = 91$$

$$G(z) = \frac{10(z^2 - 1)}{111z^2 - 198z + 91}\ ; \ y(n) = \frac{198}{111} \cdot y(n-1) - \frac{91}{111} \cdot y(n-2) + \frac{10}{111}[x(n) - x(n-2)]$$

Se ω_n = 1Krad/s allora: Tc = 2/(ω_n·a) = 0.2ms. Si riporta una tabella Excel con 20 valori calcolati.

n	n*Tc	x(n)	y(n)
-2	-0,0004	0	0,00000
-1	-0,0002	0	0,00000
0	0,0000	1	0,09009
1	0,0002	1	0,25079
2	0,0004	1	0,37350
3	0,0006	1	0,46064
4	0,0008	1	0,51548
5	0,0010	1	0,54186
6	0,0012	1	0,54396
7	0,0014	1	0,52608
8	0,0016	1	0,49247
9	0,0018	1	0,44716
10	0,0020	1	0,39391
11	0,0022	1	0,33605
12	0,0024	1	0,27651
13	0,0026	1	0,21773
14	0,0028	1	0,16170
15	0,0030	1	0,10994
16	0,0032	1	0,06354
17	0,0034	1	0,02321
18	0,0036	1	-0,01069
19	0,0038	1	-0,03809
20	0,0040	1	-0,05919

T_c=	2,00E-04
w_n=	1,00E+03
a=2/(T_c*w_n)=	10

a (imposto)= 10

Filtro passa banda del II ordine

con formule iterative ricavate dalla trasformata Z

Risposta al gradino

ξ=	**0,5**
α=	111
β=	-198
γ=	91