Tratto dal Corso di Telecomunicazioni Vol. I Ettore Panella Giuseppe Spalierno Edizioni Cupido

Canali di comunicazione

1. Introduzione

In questo capitolo saranno esaminati i principali mezzi di trasmissione che realizzano i **canali di comunicazione** per lo scambio di informazioni sia analogiche che numeriche tra apparati posti anche a notevole distanza.

In particolare saranno trattate le **linee di trasmissione**, le **antenne**, le **guide d'onda** e le **fibre ottiche**.

In generale si può affermare che un canale di comunicazione per essere ideale dovrebbe consentire il trasferimento dell'informazione senza modificare in alcun modo lo spettro delle frequenze del segnale.

In altre parole un canale ideale è **non distorcente** se il segnale ricevuto presenta la stessa forma di quello trasmesso a meno dell'attenuazione. In realtà, un canale reale modifica la forma di un segnale per le seguenti cause:

1) *Attenuazione*. Riduce il livello del segnale in funzione della lunghezza e del tipo di canale;

2) *Distorsione di ampiezza e fase*. Un segnale periodico complesso è composto da numerose armoniche ognuna delle quali subisce modifiche di ampiezza e fase che dipendono dalla frequenza e dalla caratteristiche del mezzo. Il segnale ricevuto risulta deformato;

3) *Disturbi e interferenze*. Sono segnali elettrici indesiderati che si sovrappongono al segnale in trasmissione rendendo difficoltosa l'estrazione dell'informazione utile. In fig.1 si mostra una classificazione generale dei mezzi trasmissivi.



Fig.1 Classificazione dei principali canali di comunicazione.

La scelta del tipo di canale da impiegare per la trasmissione dipende da numerosi fattori i più importanti sono legati alla banda occupata dal segnale da trasmettere e alla distanza tra gli apparati ricetrasmittenti.

Per quanto riguarda la massima frequenza di lavoro si ha la seguente classificazione:

- doppino telefonico, fino a qualche MHz;
- cavo coassiale, fino a qualche GHz;
- fibra ottica, fino a qualche decina di GHz;
- onde elettromagnetiche, fino a diverse decine di GHz.

2. Linee di trasmissione: cavi telefonici e cavi coassiali

Le linee di trasmissione sono i classici sistemi di collegamento impiegati per trasferire energia elettrica tra due apparati distinti.

Sono fondamentalmente costituite da due fili isolati fra loro. Nel campo delle trasmissioni dati riveste particolare importanza il cavo telefonico e quello coassiale di cui in fig. 2 si riportano due tipiche strutture.

Il primo, denominato doppino telefonico, è costituito da due conduttori di rame elettrolitico puro al 99% intrecciati ad elica con diametro compreso tra 0.4 mm e 1.3 mm isolati tra loro con carta o polietilene e inseriti in una guaina di plastica protettiva. Pùò essere sia schermato (STP – Shielded Twisted Pair) che non schermato (UTP – Unshielded Twisted Pair). Spesso entro la stessa guaina sono inseriti più doppini (fino a 2400 coppie) cordati insieme e avvolti ad elica come mostrato in fig.2a). In questo modo lo stesso cavo supporta un elevato numero di canali telefonici.

Le coppie sono intrecciate tra loro, con opportuno passo, in modo da ridurre l'effetto della diafonia. Delle coppie contenute in un cavo non tutte sono utilizzate per l'utenza. Alcune sono di servizio per il gestore altre di riserva.



Fig. 2 a) Struttura di cavo telefonico; b) cavo coassiale.

I cavi telefonici sono del tipo a *coppie simmetriche* poiché i due conduttori di ciascuna coppia presentano caratteristiche elettriche simmetriche rispetto alla terra. I cavi si classificano in:

• *Cavi a coppia* se le diverse coppie sono affasciate a due a due, intrecciate e cordate insieme.

• *Cavi a bicoppie a stella* nel caso in cui i fili interni sono affasciati a quattro a quattro, intrecciati e cordati insieme. Il gruppo di quattro fili prende il nome di bicoppia.

• Cavi a bicoppie Dieselhort-Martin (cavi DM) se sono dapprima cablati a coppie e successivamente affasciati a bicoppie e quindi intrecciati e cordati insieme.

Il doppino è ampiamente utilizzato per le connessioni telefoniche che vanno dall'apparecchio dell'utente alla centrale.

Il cavo coassiale, mostrato in fig.2b), è costituito da due conduttori: uno interno, di rame detto "anima", l'altro più esterno realizzato con filo intrecciato e denominato "calza".

Quest'ultima, tra l'altro, svolge un'efficace azione schermante contro l'induzione di disturbi dell'ambiente esterno entro il conduttore centrale.

I due conduttori, anima e calza metallica, sono separati da un isolante costituito da un tubetto di materiale polivinilico. Il tutto è racchiuso in una guaina protettiva isolante. I cavi coassiali sono ampiamente utilizzati nei collegamenti d'antenna per TV, nelle reti di computer e nelle reti telefoniche e dati. Le dimensioni geometriche d (diametro esterno del conduttore interno) e D (diametro interno del conduttore esterno) caratterizzano il tipo di cavo. Ovviamente i coassiali con dimensioni maggiori presentano una più elevata banda passate. I cavi coassiali utilizzati in ambito telefonico sono spesso costituiti da numerose coppie coassiali in un unico involucro isolante, generalmente una guaina di piombo. Una tipica classificazione è:

• *Coassiale.* Utilizzato nelle trasmissioni analogiche con larghezza di banda fino a 60MHz e trasmissioni numeriche fino a 140Mb/s. Le dimensioni tipiche sono d = 2.6mm e D = 9.4mm. Per tale motivo il cavo è detto coassiale 2.6/9.4. Tipico è il cavo a 24 coppie.

• *Coassialino* Ha dimensioni più ridotte. Tipico è il coassialino 1.2/4.4 a 36 coppie utilizzato nelle trasmissioni analogiche fino a 12MHz e numeriche a 34Mb/s e 140Mb/s.

• *Microcoassiale*. Ha dimensioni tipiche 0.7/2.9 e può contenere fino a 48 coppie per cavo. È utilizzato nei sistemi analogici fino a 4MHz e numerici a 8Mb/s e 34Mb/s.

In passato i cavi coassiali, inseriti in robuste strutture isolanti venivano utilizzati come cavi sottomarini nei collegamenti intercontinentali. Attualmente al loro posto si preferisce impiegare cavi in fibra ottica o sistemi di collegamento satellitare.

I doppini e i cavi coassiali costituiscono la struttura fondamentale della rete telefonica urbana. In ambito interurbano si preferisce utilizzare collegamenti in fibra ottica o in ponte radio.

In generale, la rete telefonica prevede *linee commutate* e *linee dedicate*. Le prime attraversano le centrali telefoniche di commutazione (da cui il nome di "commutate") e sono impiegate normalmente per il traffico telefonico. Presentano una banda passante limitata (B = 4 KHz) a causa di particolari filtri presenti nelle centrali telefoniche. Nella trasmissione dati la velocità di trasmissione dipende fortemente dalla banda passante del canale di trasmissione.

In un successivo capitolo sarà dimostrato che la velocità massima v [bit/s] consentita per un generico canale di trasmissione è proporzionale alla banda passante B secondo la seguente formula di Nyquist:

$$v \cong 2 \cdot B$$
 [bit/sec] (1)

Come si vedrà, a parità di canale, è possibile aumentare notevolmente la velocità di trasmissione impiegando opportune tecniche di modulazione. Si pensi, ad esempio, ai veloci sistemi di trasmissione dati ISDN o ADSL il cui studio sarà approfondito nel successivo volume.

Il grande vantaggio della rete telefonica commutata sta nell'enorme capillarità dei collegamenti tra i vari utenti sia in ambito nazionale che internazionale.

Le linee telefoniche dedicate (gestite dalla TELECOM oppure private) non attraversano le centrali di commutazione del traffico telefonico e pertanto consentono una maggiore velocità di trasmissione e un più alto rapporto segnale/rumore.

Per migliorare ulteriormente la velocità di trasmissione le linee dedicate sono realizzate con cavo coassiale o con fibra ottica piuttosto che con il normale doppino telefonico.

Prima di intraprendere lo studio delle linee di trasmissione si consiglia di rivedere quanto detto nel paragrafo 2 del Cap.I a proposito dei moti ondulatori.

2.1 Caratteristiche elettriche delle linee

Un generico tratto di linea di trasmissione di lunghezza infinitesima dx, si può schematizzare come in fig. 3.



Fig.3 Circuito equivalente di un tratto di linea infinitesima dx.

In particolare:

• **R** rappresenta la resistenza elettrica e dipende dal tipo di materiale, dalle dimensioni geometriche del filo, dalla temperatura e dalla frequenza. Quest'ultimo parametro interviene alle alte frequenze con il cosiddetto effetto pelle (skin effect) a causa del quale la corrente nel conduttore tende, all'aumentare della frequenza, ad addensarsi sempre più sulla superficie del conduttore. L'effetto è un aumento della resistenza con l'aumentare della frequenza.

• L è l'induttanza del tratto di linea e tiene conto dei fenomeni di autoinduzione e mutua induzione dei conduttori in corrente alternata. Dipende essenzialmente dalle caratteristiche geometriche della linea e dal numero di conduttori entro la guaina del cavo telefonico.

• C è la capacità parassita esistente tra i due conduttori metallici e l'isolante interposto che funge da dielettrico. Dipende essenzialmente dalle caratteristiche geometriche dei conduttori e dalla natura del dielettrico.

• **G** rappresenta la conduttanza esistente tra i due conduttori della linea e dipende dalla natura dell'isolante, dalla distanza tra i conduttori e dalla frequenza di esercizio. Si calcola tendo conto dell'angolo di perdita δ del dielettrico interposto tra i due conduttori della linea (Si ricordi che tg $\delta = G/\omega C$).

I valori di R, L, G, e C sono ovviamente "distribuiti" lungo tutta la linea ma in fig. 3 si sono supposti "concentrati" in un tratto di linea di lunghezza dx. Tali parametri sono noti come **costanti primarie** della linea.

Si riportano le formule fondamentali per il calcolo delle costanti primarie nel caso di una linea a coppie simmetriche e di un cavo coassiale di lunghezza unitaria (fig.2).

Linea	R [Ω/m]	L[H/m]	C[F/m]	G[S/m]
Bifilare	$R_0(0.125 \cdot d \cdot \sqrt{f} + 0.25)$	$\frac{\mu}{\pi}\ln(2D/d)$	$\frac{\pi \cdot \varepsilon}{\ln(2D/d)}$	თ Ctg δ
Coassial e	$R_0 \cdot \frac{2.64}{D} \cdot \sqrt{f} (1 + d/D)$	$\frac{\mu}{2\pi}\ln(D/d)$	$\frac{2\pi\cdot\epsilon}{\ln(D/d)}$	ωCtgδ

Dove $R_0 = \rho L/S$ è la resistenza in corrente continua del conduttore. Ci si riferisce alla lunghezza unitaria L = 1m.

Per il rame , la resistività $\rho = 17.2 \cdot 10^{-9} \Omega m$. Nelle formule per il calcolo di R, la frequenza è espressa in KHz e le dimensioni dei conduttori in mm².

La permeabilità magnetica del materiale vale: $\mu = \mu_0 \mu_r \text{ con } \mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ [H/m], mentre la costante dielettrica $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r \text{ con } \varepsilon_0 = 8.84 \cdot 10^{-12}$ [F/m]. Tipicamente per gli isolanti utilizzati risulta: tg $\delta \cong 10^{-6}$, $\mu_r \cong 1 \text{ e } \varepsilon_r$ compreso tra 1 e 2

A titolo orientativo si indicano i valori dei parametri caratteristici di un doppino telefonico calcolati alla frequenza di 800 Hz, come stabilito dall'ITU-T.

d = 0.7 mm; $R = 90 \Omega/\text{Km}$; L = 0.7 mH/Km; $G = 0.7 \mu\text{S/Km}$; C = 38 nF/Km.

2.1.1 Equazioni dei telefonisti

Se si suppone di lavorare con segnali sinusoidali a frequenza f, dalla fig. 3 si deduce:

$$V_{u} - V_{i} = -dV = -(R + j\omega L)I \cdot dx \quad \text{ovvero}: \frac{dV}{dx} = (R + j\omega L)I \quad (2)$$

$$I_{u} - I = -dI = -(G + j\omega C) V \cdot dx \quad \text{ovvero}: \quad \frac{dI}{dx} = (G + j\omega C) \cdot V \quad (3)$$

Derivando la (2) rispetto a x si ha:e tenendo conto della (3) si ha:

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = (R + j\omega L)\frac{dI}{dx} \qquad \text{ovvero:} \quad \frac{d^2 V}{dx^2} = (R + j\omega L)(G + j\omega C)V \quad (4)$$

posto: $\gamma = \sqrt{\left(R + j\omega L\right) \cdot \left(G + j\omega C\right)}$, la (4) diventa:

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = \gamma^2 \cdot V \tag{5}$$

La quantità γ è denominata *costante di propagazione* e ha per dimensioni: $\sqrt{\frac{\Omega}{m} \cdot \frac{S}{m}} = \sqrt{\frac{1}{m^2}} = 1/m = m^{-1}.$

La (5) è una classica equazione differenziale del secondo ordine che consente di determinare l'andamento della tensione lungo la linea.

Si dimostra che la soluzione generale dell'equazione differenziale (5) è:

$$V(x) = V_{f} \cdot e^{-\gamma x} + V_{r} \cdot e^{\gamma x}$$
(6)

Le quantità V_f (forward voltage) e V_r (reverse voltage) rappresentano, rispettivamente, l'ampiezza della tensione diretta immessa nella linea dal generatore di entrata e quella della tensione riflessa che dall'utilizzatore ritorna verso l'entrata.

Il fenomeno è del tutto analogo a quello di una corda elastica con un estremo fisso. Se si produce una deformazione si genera un'onda che si propaga verso l'estremo fisso (onda diretta). In tale estrtemo si genera una nuova onda (onda riflessa) che si propaga nella direzione opposta.

Derivando la precedente rispetto a x e tenendo conto della (2), si ricava:

$$I(x) = \frac{V_{f}}{Z_{0}} \cdot e^{-\gamma x} - \frac{V_{r}}{Z_{0}} \cdot e^{\gamma x}$$
(7)

Le precedenti relazioni (6) e (7) sono note come Equazioni dei Telefonisti.

Si è posto:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{R} + j\omega \mathbf{L}}{\mathbf{G} + j\omega \mathbf{C}}} = \sqrt{\frac{\mathbf{R}(1 + j\omega \mathbf{L}/\mathbf{R})}{\mathbf{G}(1 + j\omega \mathbf{C}/\mathbf{G})}} = \sqrt{\frac{\mathbf{Z}}{\mathbf{Y}}}$$
(8)

La quantità Z_0 ha come unità di misura $[\Omega]$ ed è nota come impedenza caratteristica della linea.

I parametri Z_0 e γ rappresentano le **costanti secondarie** della linea.

I termini con esponenziale negativo indicano la presenza di un'onda diretta (onda progressiva) che si propaga dal generatore verso l'utilizzatore con ampiezza che decresce allontanandosi dal generatore.

I termini con esponenziale positivo indicano la presenza di un'*onda riflessa* (onda regressiva) che si propaga dall'utilizzatore verso il generatore con ampiezza che cresce nella direzione generatore-utilizzatore e quindi decresce nella direzione opposta. L'onda diretta e quella riflessa

.

(se presente) interagiscono tra loro generando un sistema di onde dette **onde stazionarie** di cui si parlerà più diffusamente nei prossimi paragrafi.

Il segno negativo presente nella (7) ci dice inoltre che la corrente diretta $I_f = V_f/Z_0$ e quella riflessa $I_r = V_r/Z_0$ hanno verso opposto.

La costante di propagazione è un numero complesso che si pone nella forma:

$$\gamma = \alpha + j\beta \tag{9}$$

La costante α è detta *costante di attenuazione* ed indica l'attenuazione per unità di lunghezza che subisce il segnale sinusoidale nel percorrere la linea e si misura in Np/m o in dB/m oppure in Np/Km o in dB/Km

La *costante di fase* β rappresenta lo sfasamento del segnale sinusoidale, per unità di lunghezza, lungo la linea e si misura, normalmente in rad/m oppure in rad/Km.

Per ricavare i valori di α e β in funzione delle costanti primarie si procede nel seguente modo. Posto:

$$\alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L) \cdot (G + j\omega C)}$$

Elevando al quadrato ambo i membri ed uguagliando le parti reali e immaginarie si ottiene il seguente sistema di due equazioni nelle incognite α e β .

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = RG - \omega^2 - LC \\ 2\alpha\beta = \omega RC + \omega LG \end{cases}$$

Risolvendo si ricava:

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{(R^{2} + \omega^{2}L^{2})(G^{2} + \omega^{2}C^{2})} + \frac{1}{2}(RG - \omega^{2}LC)} \quad [Np/m]$$
$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{(R^{2} + \omega^{2}L^{2})(G^{2} + \omega^{2}C^{2})} - \frac{1}{2}(RG - \omega^{2}LC)} \quad [rad/m]$$

A titolo orientativo si riportano i valori tipici delle costanti secondarie per un cavo coassiale 2.6/9.4:

- frequenza di lavoro1KHz: $Z_0 = 75 \Omega$; $\alpha = 0.2 \cdot 10^{-3} \text{ dB/m}$; $\beta = 30 \cdot 10^{-6} \text{ rad/m}$.

- frequenza di lavoro1MHz: $Z_0 = 75 \Omega$; $\alpha = 2.10^{-3} \text{ dB/m}$; $\beta = 20.10^{-3} \text{ rad/m}$.

Altri due parametri caratteristici nello studio delle linee sono *la lunghezza d'onda* λ e la *velocità di propagazione u*. La lunghezza d'onda λ è per definizione lo spazio che l'onda percorre lungo la linea in un tempo pari al nel periodo T = 1/f. Si ha:

$$\lambda = \mathbf{u} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{u} / \mathbf{f} \qquad [\mathbf{m}] \tag{10}$$

Nello spazio vuoto la velocità di propagazione si può ritenere pari a quella della luce $(c=3 \cdot 10^8 \text{ m/s})$ mentre in una linea tale velocità, indicata con u, è inferiore e vale: $u = K \cdot c$.

Il parametro K, denominato *fattore di velocità*, dipende dalla costituzione fisica della linea. Tipicamente $K = 0.85 \div 0.95$.

La costante di fase β si può esprimere anche in funzione di λ . Infatti, dopo una distanza pari a λ , il segnale sinusoidale subisce uno sfasamento di 2π rad (360°) mentre β è lo sfasamento per unità di lunghezza, per cui:

$$\lambda$$
 : $2\pi = 1$: β

e quindi:

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad [rad / m] \qquad (11)$$

Tenendo conto della (10) si ricava:

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{u} = \frac{\omega}{u}$$

Esprimendo gli sfasamenti in gradi si può scrivere:

$$\beta = \frac{360^{\circ}}{\lambda} \qquad \left[\text{gradi} / \text{m} \right] \qquad (12)$$

Dalle relazioni precedenti si deduce che quando un segnale si propaga lungo una linea subisce sia un'attenuazione che uno sfasamento dipendenti dalla frequenza. Se il segnale di ingresso non è perfettamente sinusoidale si può scomporre nella somma di segnali sinusoidali (sviluppo in serie di Fourier) ed applicare ad ogni armonica le relazioni precedenti. Ogni componente armonica sarà caratterizzata da una propria velocità di propagazione e da una propria attenuazione. Ciò produce una deformazione nella forma del segnale in ricezione sul carico. In altre parole si dice che il segnale sul carico risulta distorto sia in ampiezza che in fase. Pertanto, affinché non vi siano distorsioni di ampiezza e fase lungo la linea la costante di attenuazione α e la velocità di propagazione u = ω/β devono essere indipendente dalla frequenza. Pertanto, la costante di fase β deve variare linearmente con la frequenza. Ciò accade se è verificata la seguente *relazione di non distorsione* o di Heaviside:

$$1+j\omega L/R = 1+j\omega C/G$$
 ovvero: $R \cdot C = L \cdot G$ (13)

Sostituendo tale uguaglianza nelle formule di α , β e Z₀, si ricava:

$$\alpha = \sqrt{\mathbf{R} \cdot \mathbf{G}}; \qquad \beta = \frac{\omega}{u}; \qquad \mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{L} \cdot \mathbf{C}}}; \qquad \mathbf{Z}_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{G}}}$$
(14)

Appare evidente che α e u risultano indipendenti dalla frequenza.

In una linea di trasmissione la condizione di Heaviside non è verificata poiché generalmente si ha: $R \cdot C > L \cdot G$. Per realizzare la condizione (13) si utilizzano varie tecniche

che consentono di aumentare artificialmente il valore della costate L. In ambito telefonico si ricordano le classiche tecniche di:

• *Pupinizzazione* che consiste nell'inserire in serie alla linea, ad opportune distanze (circa ogni 2Km), delle bobine.

• *Krarupizzazione* che consiste nell'avvolgere intorno alla linea un nastro di materiale ferroso.

In entrambi i casi, però, si ha una drastica riduzione della banda passante della linea. Per tale motivo attualmente tali tecniche sono state abbandonate e si preferisce impiegare circuiti di equalizzazione più complessi.

È facile verificare che una linea priva di perdite (R = 0; G = 0), o con perdite trascurabili, soddisfa la condizione di Heaviside e quindi è sicuramente non distorcente. In tal caso si ricava:

$$\alpha = 0$$
; $\gamma = j\beta = j\omega\sqrt{LC}$; $u = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$; $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$

In fig.4 si riportano gli andamenti qualitativi di α e β per un canale ideale e reale.



Fig. 4 Tipiche risposte in frequenza di α e β per un canale ideale e reale.

Per concludere si riportano alcuni dati caratteristici del cavo coassiale con conduttori in rame ed isolamento in PVC (cloruro di polivinile) RG58 A/U:

 $Z_0 = 50\Omega$; C = 98 pF/m; K = 0.66; $\alpha = 0.11$ dB/m alla frequenza di f = 50 MHz.

Nota l'attenuazione di un cavo ad una frequenza f si può calcolare l'attenuazione ad una frequenza f_x applicando la seguente formula:

$$\alpha_x = \alpha \cdot \sqrt{\frac{f_x}{f}}$$

Ad esempio, per il cavo in esame RG58 A/U alla frequenza $f_x = 400$ MHz l'attenuazione risulta:

$$\alpha_x = \alpha \cdot \sqrt{\frac{f_x}{f}} = 0.11 \cdot \sqrt{\frac{400}{50}} = 0.313 \, \text{dB/m}$$

Esempio n. 1

Calcolare i valori delle costanti primarie e secondarie di un cavo coassiale operante alla frequenza di 1 MHz. Le dimensioni del cavo sono:

 $d = 2.6 \text{mm}^2 \text{ e } \text{D} = 9.5 \text{ mm}^2$. Si assuma $\varepsilon_r = 1.05$, $\mu_r = 1$, tg $\delta = 10^{-6}$. Si calcoli, inoltre, la velocità di propagazione.

Risoluzione

La resistenza specifica relativa ad un tratto di cavo di lunghezza 1m, vale:

$$R_0 = \frac{\rho}{\pi (d/2)^2} = 17.2 \cdot 10^{-9} \frac{4}{\pi (2.6 \cdot 10^{-3})^2} = 3.24 \cdot 10^{-3} \quad [\Omega/m]$$

Alla frequenza di 1MHz la resistenza aumenta per effetto pelle, per cui:

$$R = R_0 \quad \cdot \frac{2.64}{D} \cdot \sqrt{f} (1 + d/D) = \frac{2.64}{9.5} \cdot \sqrt{1000} (1 + 2.6/9.5) = 36.26 \ \Omega/m$$

Per il calcolo delle altre costanti primarie è sufficiente applicare le formule:

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \ln(D/d) = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} \ln(9.5/2.6) = 0.26 \ \mu \text{H/m}$$
$$C = \frac{2\pi \cdot \epsilon}{\ln(D/d)} = \frac{2\pi \cdot 1.05 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}}{\ln(9.5/2.6)} = 45 \ \text{pF/m}$$
$$G = \omega \text{Ctg}\delta = 6.28 \cdot 10^6 \cdot 10^{-6} \cdot 45 \cdot 10^{-12} = 0.8 \ \text{nS/m}$$

Il calcolo delle costanti secondarie è più laborioso. Si calcolano dapprima l'impedenza Z e l'ammettenza Y della linea fig.3):

$$Z = R + j\omega L = 36.26 \cdot 10^{-3} + j1.63$$

Y = G + j\overline{C} = 0.27 \cdot 10^{-9} + j288.6 \cdot 10^{-6}

Trasformando in forma polare si ricava il modulo e la fase :

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = 1.63 \ \Omega/m$$
 $\theta_{Z} = \arctan(\omega L/R) = 88.7^{\circ}$

$$|Y| = \sqrt{G^2 + (\omega C)^2} = 0.29 \cdot 10^{-3} \text{ S/m}$$
 $\theta_{Y} = \arctan(\omega C/G) = 89.9^{\circ}$

Ricordando le regole per la moltiplicazione e divisione di due numeri complessi e applicando la formula di Moivre⁽¹⁾, si ricava il valore del modulo e della fase delle costanti secondarie della linea:

Per l'impedenza caratteristica si ha:

$$|Z_0| = \sqrt{\frac{|Z|}{|Y|}} = \sqrt{\frac{1.63}{0.29 \cdot 10^{-3}}} = 75 \Omega;$$

$$\theta_{Z0} = \frac{\theta_Z - \theta_{\gamma}}{2} = (88.7 - 89.9)/2 = -0.6^{\circ}$$

Per la costante di propagazione si ha :

$$|\gamma| = \sqrt{|Z| \cdot |Y|} = \sqrt{1.63 \cdot 0.29 \cdot 10^{-3}} = 21.7 \cdot 10^{-3} 1/m$$

 $\theta_{\gamma} = \frac{\theta_{Z} + \theta_{\gamma}}{2} = (88.7 + 89.9)/2 = 89.3^{\circ}$

La costante di attenuazione vale:

$$\alpha = |\gamma| \cos\theta_{\gamma} = 21.7 \cdot 10^{-3} \cos 89.3^{\circ} \cong 0.26 \cdot 10^{-3} \text{ Np/m}$$

La costante di fase vale:

$$\beta = |\gamma| \operatorname{sen}_{\gamma} = 21.7 \cdot 10^{-3} \operatorname{sen} 89.3^{\circ} \cong 21.7 \cdot 10^{-3} \operatorname{rad/m}$$

La velocità di propagazione dell'onda elettromagnetica nella linea risulta:

$$u = \frac{2\pi f}{\beta} = 2.89 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Si osservi che l'impedenza caratteristica Z_0 è, praticamente, puramente resistiva (l'angolo di fase è di appena -0.6°) e vale 75 Ω .

2.2 Linea di lunghezza infinita

 $^{^{(1)}}$ La formula di Moivre ci dice che l'elevamento a potenza $(\mathbf{V})^{n/m}$ di un numero complesso di modulo |V| e fase ϕ ha per modulo $|V|^{n/m}$ e per fase $n \cdot \phi/m$.

Consideriamo il caso di una linea di lunghezza infinita che, anche se non praticamente realizzabile, riveste un particolare interesse teorico. Nelle equazioni generali di propagazione date dalle (6) e (7), si è detto che il termine corrispondente all'esponenziale $e^{\gamma x}$ rappresenta un'onda riflessa. Ovviamente, per una linea infinitamente lunga tale contributo è nullo. Infatti se x tende ad infinito, V(x) deve tendere a zero a causa dell'inevitabile attenuazione presente lungo la linea. Ciò è possibile solo se V_r = 0. Le (6) e (7), diventano:

$$V(x) = V_f \cdot e^{-\gamma x}$$
(15)

$$I(x) = \frac{V_f}{Z_0} \cdot e^{-\gamma x}$$
(16)

per x = 0 si ha, in particolare:

$$V(0) = V_{f}$$
; $I(0) = V_{f} / Z_{0}$

Il termine V_f rappresenta l'ampiezza della tensione di ingresso V_i applicata alla linea. Posto V_f = V_i, si ha:

$$V(x) = V_i \cdot e^{-\gamma x} \tag{17}$$

$$I(x) = \frac{V_i}{Z_0} \cdot e^{-\gamma x}$$
(18)

Dividendo membro a membro le precedenti relazioni si ha:

$$\frac{\mathbf{V}(\mathbf{x})}{\mathbf{I}(\mathbf{x})} = \mathbf{Z}_0 \tag{19}$$

Dalla (19) si evince che l'impedenza in un punto qualunque di una linea infinitamente lunga è costante e coincide con Z_0 .

Pertanto, se una linea viene chiusa su una impedenza $Z_u = Z_0$, nella linea non vi sono riflessioni poiché si comporta come se fosse di lunghezza infinita. In tal caso la linea si dice *adattata* come mostrato in fig.5b.



Fig.5. - a) Linea di lunghezza infinita priva di onda riflessa; b) linea chiusa sull'impedenza caratteristica Z₀ che simula il comportamento di una linea infinita.

La relazione (17), o in modo analogo la (18), si può scrivere, applicando le formule di $Eulero^{(2)}$:

$$V(x) = V_i \cdot e^{-\gamma x} = V_i \cdot e^{-\alpha x} \cdot e^{-j\beta x} = V_i \cdot e^{-\alpha x} (\cos\beta x - j \sin\beta x)$$

La precedente espressione ci dice che muovendosi lungo la linea, nel verso positivo delle x, il modulo del vettore tensione (o corrente) decresce esponenzialmente, mentre la fase aumenta.

Per calcolare l'attenuazione del segnale alla distanza x dal generatore si deve risolvere l'equazione:

$$V(x) = V_i \cdot e^{-\alpha x}$$

Indicando con $A[dB] = 20LogV(x)/V_i$ l'attenuazione espressa in dB e ricordando che 20Loge = 8.686 si ricava:

$$A[db] = 8.686 \cdot \alpha x$$

In molte applicazioni pratiche è conveniente assumere per V_i dei valori assoluti (par.7.2 Cap.II). Nel caso dei sistemi telefonici si assume V_i = 0.775 V e l'unità di misura dell'attenuazione è il dBv, mentre per i sistemi in cavo coassiale usati negli impianti TV si assume V_i = 1 μ V e l'attenuazione si esprime in dB μ V. Ad esempio, una tensione di 100 μ V equivale a 20Log(100 μ V/1 μ V) = 40 dB μ V.

Per misurare sperimentalmente l'impedenza caratteristica di una linea è sufficiente tenere conto del fatto che un tronco di linea è equivalente ad un quadripolo simmetrico (Cap.II) per cui: $Z_0 = \sqrt{Z_{ia} \cdot Z_{ic}}$ dove Z_{ia} è l'impedenza misurata in entrata con uscita aperta, mentre Z_{ic} è quella misurata con uscita in cortocircuito. Le misure di Z_{ia} e Z_{ic} si possono facilmente ottenere impiegando, ad esempio, un ponte di Weatstone in alternata ad una frequenza di riferimento pari a quella di lavoro della linea.

3. Linea di lunghezza finita chiusa su un carico generico

Consideriamo una linea di lunghezza finita l, chiusa su un carico generico Z_u , come mostrato in fig.6. L'energia elettromagnetica che si propaga lungo la linea quando giunge sul carico $Z_u \neq Z_0$ in parte è assorbita e in parte è riflessa. Lungo la linea sono presenti, simultaneamente, onde dirette, dal generatore verso il carico, e onde riflesse nella direzione opposta. Tali contributi sono indicati analiticamente nelle equazioni dei telefonisti (6) e (7). In molte applicazioni è importante valutare i valori assunti della tensione V(d), della corrente I(d) e dell'impedenza Z(d) della linea ad una distanza d dal carico.

Supponiamo di operare con una linea priva di perdite ($\alpha = 0$) e misuriamo le distanze a partire dal carico Z_u.

⁽²⁾ La formula di Eulero ci dice che: $e^{\pm j\beta x} = \cos\beta x \pm j \sin\beta x$

Le equazioni generali (6) e (7), ponendo $x = l - d e \gamma = j\beta$, diventano:

$$V(d) = V_{f} \cdot e^{-j\beta l} \cdot e^{j\beta d} + V_{r} \cdot e^{j\beta l} \cdot e^{-j\beta d} = V_{fu} \cdot e^{j\beta d} + V_{ru} \cdot e^{-j\beta d}$$
(20)

$$I(d) = I_{f} \cdot e^{-j\beta l} \cdot e^{j\beta d} + I_{r} \cdot e^{j\beta l} \cdot e^{-j\beta d} = I_{fu} \cdot e^{j\beta d} + I_{ru} \cdot e^{-j\beta d}$$
(21)



Fig.6. - Linea di lunghezza / chiusa su un carico generico Z_u

I termini V_{fu} e I_{fu} rappresentano, rispettivamente, le componenti della tensione e della corrente diretta sul carico, mentre i termini V_{ru} e I_{ru} rappresentano le componenti della tensione e della corrente dell'onda riflessa sul carico.

Avendo supposto la linea priva di perdite è evidente che l'ampiezza dell'onda diretta V_f e riflessa V_r sono costanti lungo tutta la linea e coincidono con i valori assunti sul carico V_{fu} e V_{ru} .

Si osservi che la (20) e (21) sono le equazioni dei telefonisti scritte prendendo come origine il carico. Pertanto, gli esponenziali hanno segno opposto per l'onda diretta e riflessa.

Applicando alla (20) le formule di Eulero si ha:

$$V(d) = V_{fu} \cos\beta d + j V_{fu} \sin\beta d + V_{ru} \cos\beta d - j V_{ru} \sin\beta d =$$

= (V_{fu} + V_{ru}) \cos\beta d + j(V_{fu} - V_{ru}) \sen\beta d

Ma, la tensione di uscita è la somma vettoriale delle componenti di tensione diretta e riflessa: $V_u = V_{fu} + V_{ru}$

Mentre la corrente relativa all'onda riflessa ha segno opposto rispetto a quella dell'onda diretta, per cui:

$$I_u = I_{fu}$$
 - I_{fu}

 $E \ quindi: Z_0 \ I_u = \ Z_0 I_{fu} \ \textbf{-} \ Z_0 I_{fu}.$

Per definizione di impedenza caratteristica deve essere: $Z_0 = \frac{V_{fu}}{I_{fu}} = \frac{V_{ru}}{I_{ru}}$.

Si può pertanto scrivere: $Z_0 I_u = V_{fu} - V_{ru}$.

Tenendo conto delle precedenti relazioni si ha, finalmente:

$$V(d) = V_u \cos\beta d + jZ_0 I_u \cdot \sin\beta d$$
⁽²²⁾

Procedendo in modo analogo si ricava, per I(d):

$$I(d) = I_u \cos\beta d + j \frac{V_u}{Z_0} \sin\beta d$$
(23)

L'impedenza Z(d) a distanza d dal carico si ottiene dividendo tra loro la (22) e la (23):

$$Z(d) = Z_0 \cdot \frac{Z_u + jZ_0 \cdot tg\beta d}{Z_0 + jZ_u \cdot tg\beta d}$$
(24)

Se nella precedente relazione si pone d = l si ricava l'impedenza d'ingresso della linea. Il comportamento potrà essere capacitivo, induttivo o puramente resistivo a seconda dei valori assunti dal termine βd .

Nel seguito saranno analizzati alcuni casi particolari di notevole interesse sia teorico che pratico. In particolare si studierà la linea con uscita in cortocircuito ($Z_u=0$), quella con uscita a vuoto ($Z_u = \infty$) e quella di lunghezza $\lambda/4$.

Al momento si vuole solo far osservare che ad una distanza dal carico multipla intera di mezza lunghezza d'onda (d = $n\lambda/2$) si ha : $tg\beta d = tg \frac{2\pi}{2\pi} \cdot \frac{n\lambda}{n} = 0$.

mezza lunghezza d'onda (d =
$$n\lambda/2$$
) si ha : $tg\beta d = tg\frac{2\lambda}{\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{2}$

Per cui risulta: $Z\left(n\frac{\lambda}{2}\right) = Z_u$

Pertanto, trascurando l'attenuazione, si può affermare che un tratto di linea multiplo intero di $\lambda/2$ e come se non esistesse ai fini dell'impedenza vista dal generatore di entrata.

Lo studio precedente si riferisce al caso elementare di segnali puramente sinusoidali. Nella realtà il segnale che transita lungo una linea si estende entro una certa banda di frequenza e l'analisi deve essere condotta per le diverse componenti armoniche ottenute utilizzando lo sviluppo in serie di Fourier.

2.3.1 Coefficienti di riflessione

Si definiscono coefficienti di riflessione di tensione e di corrente sul carico, le quantità vettoriali:

$$\overline{\rho}_{v} = \frac{V_{ru}}{V_{fu}}$$
(24)
$$\overline{\rho}_{i} = -\frac{I_{ru}}{I_{fu}}$$
(25)

Il segno meno sta ad indicare, come più volte detto, che le due onde di corrente diretta e riflessa hanno verso opposto. I due coefficienti di riflessione sono uguali ed opposti, infatti:

$$\overline{\rho}_{i} = -\frac{I_{ru}}{I_{fu}} = -\frac{V_{ru} / Z_{0}}{V_{fu} / Z_{0}} = -\frac{V_{ru}}{V_{fu}} = -\overline{\rho}_{v}$$

In alcuni testi i coefficienti di riflessione sono indicati con la lettera Γ .

Le espressioni vettoriali della tensione e della la corrente in uscita si possono porre nella forma:

$$V_{u} = V_{fu} + V_{ru} = V_{fu} (1 + \overline{\rho}_{v})$$

$$(26)$$

$$I_{u} = I_{fu} - I_{ru} = \frac{V_{fu}}{Z_{0}} (1 + \overline{\rho}_{i})$$
(27)

Dividendo membro a membro le precedenti e tenendo conto che $V_u / I_u = Z_u$, si ricava:

$$\overline{\rho}_{v} = \frac{Z_{u} - Z_{0}}{Z_{u} + Z_{0}}$$
(28)

Il coefficiente di riflessione $\overline{\rho}_v$ è un numero complesso con modulo $\rho_v e$ fase ϑ .

Il modulo ρ_v indica l'entità della riflessione, mentre la fase ϑ fornisce l'angolo di riflessione tra i segnali di tensione diretti e riflessi.

Se si esprimono le (26) e (27) in funzioni di $\overline{\rho}_i$, si ottiene:

$$\overline{\rho}_{i} = -\frac{Z_{u} - Z_{0}}{Z_{u} + Z_{0}} \tag{29}$$

Si osservi, ancora una volta, che $\overline{\rho}_{v}$ e $\overline{\rho}_{i}$ differiscono solo per il segno.

In particolare, se $Z_u = Z_0$ i coefficienti di riflessioni sono nulli e quindi non vi sono onde riflesse come già osservato precedentemente.

Le considerazioni svolte devono essere ripetute per l'onda regressiva quando ritorna sul generatore di entrata. Se l'impedenza Z_g del generatore di ingresso e diversa da Z_0 si ha 7 - 7

riflessione anche in entrata con coefficiente di riflessione di tensione pari a : $\overline{\rho}_v = \frac{Z_g - Z_0}{Z_g + Z_0}$.

Nella pratica si cerca sempre di realizzare l'adattamento di impedenza sia in entrata che in uscita che, come vedremo nel seguito, consente il massimo trasferimento di energia tra generatore e utilizzatore.

Esempio n. 2

Una linea priva di perdite, di impedenza caratteristica $Z_0 = 75\Omega$ è chiusa su un carico $Z_u = 100 + j50 \ [\Omega]$, sapendo che la frequenza del segnale è f = 150 MHz e che la velocità di propagazione u = $2.7 \cdot 10^8$ m/sec, determinare:

- 1) la lunghezza d'onda λ ;
- 2) la costante di fase β ;
- 3) il coefficiente di riflessione $\overline{\rho}_{v}$.

Risoluzione:

La lunghezza d'onda λ vale:

$$\lambda = \frac{u}{f} = \frac{2.7 \cdot 10^8}{150 \cdot 10^6} = 1.8 \text{ m}$$

La costante di fase β risulta:

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{6.28}{1.8} = 3.49 \text{ rad} / \text{m} = 200 \text{ gradi} / \text{m}$$

Il coefficiente di riflessione $\overline{\rho}_{v}$ vale:

$$\overline{\rho}_{v} = \frac{Z_{u} - Z_{0}}{Z_{u} + Z_{0}} = \frac{100 + j50 - 75}{100 + j50 + 75} = \frac{25 + j50}{175 + j5}$$

Il modulo ρ_v assume il valore:

$$\rho_{\rm v} = \frac{\sqrt{25^2 + 50^2}}{\sqrt{175^2 + 50^2}} = 0.307$$

La fase ϑ vale:

$$\vartheta = \operatorname{arctg} \frac{50}{25} - \operatorname{arctg} \frac{50}{175} \cong 63^{\circ}$$

Il modulo ρ_v indica la frazione di onda diretta che viene riflessa dal carico. Lo sfasamento ϑ è quello che si viene a generare sul carico tra onda diretta e onda riflessa.

2.4 Onde stazionarie

In una linea è disadattata $(Z_u \neq Z_0)$ la contemporanea presenza di onde dirette e riflesse che interagiscono tra loro genera un segnale risultante denominato **onda stazionaria**. Vi sono dei punti della linea in cui l'onda diretta e riflessa sono in fase e pertanto le loro ampiezze si sommano e c'è un massimo di tensione o di corrente; viceversa se le due onde sono in opposizione di fase le loro ampiezze si sottraggono e genera un minimo di tensione o di corrente.

I punti di massimo sono detti *ventri* e quelli di minimo *nodi*. Tra un ventre e un nodo l'ampiezza dell'onda stazionaria assume dei valori intermedi tra il massimo e il minimo.

In fig.7 si mostra la distribuzione dell'ampiezza, lungo l'asse x, di un'onda stazionaria. Si può dimostrare che la distanza tra un ventre e un nodo è pari a $\lambda/4$ (Si tenga conto di quanto detto nel paragrafo 2.3.2 del Cap.I).



Fig.7 Andamento delle ampiezze di un'onda stazionaria.

Si definisce **rapporto di onda stazionaria ROS** il rapporto tra il valor massimo e quello minimo della tensione o della corrente. Operando con le tensioni si ha:

$$ROS = \frac{V_{max}}{V_{min}} = \frac{|V_{f}| + |V_{r}|}{|V_{f}| - |V_{r}|}$$
(30)

Nella terminologia anglosassone il rapporto d'onda stazionario si indica con VSWR, acronimo di *Voltage Standing Wave Ratio*.

In assenza di attenuazione i valori di $V_f e V_r$ sono costanti lungo tutta la linea e quindi coincidenti con quelli sul carico $V_{fu} e V_{ru}$.

Combinando la (30) con la (24), si ricava:

$$ROS = \frac{V_{max}}{V_{min}} = \frac{|V_{f}| + |V_{r}|}{|V_{f}| - |V_{r}|} = \frac{|V_{fu}|(1 + \rho_{v})}{|V_{fu}|(1 - \rho_{v})} = \frac{1 + \rho_{v}}{1 - \rho_{v}}$$
(31)

E' fondamentale osservare che il ROS dipende solo dal modulo del coefficiente di riflessione. Per una linea priva di perdite il modulo del coefficiente di riflessione è costante lungo tutta la linea e di conseguenza il ROS diventa un parametro caratteristico della linea.

Invertendo la formula si ricava il modulo del coefficiente di riflessione in funzione del ROS della linea:

$$\rho_{\rm v} = \frac{\rm ROS - 1}{\rm ROS + 1} \tag{32}$$

Il rapporto d'onda stazionaria ROS può variare tra 1 e infinto e fornisce una misura del grado di disadattamento di una linea.

In particolare, se la linea è adattata: $\rho_v = 0$ e ROS = 1; in caso di massima riflessione: $\rho_v = 1$ e ROS = ∞ .

L'impedenza Z(d) in un qualunque punto della linea varia in funzione del rapporto V(d)/I(d). In particolare tale impedenza risulta puramente resistiva nei ventri di tensione, dove assume il valore massimo, indicato con R_M , mentre è minima nei nodi di tensione, ed è indicata con R_m . Si ha:

$$R_{M} = \frac{V_{max}}{I_{min}} = \frac{|V_{f}| + |V_{r}|}{|I_{f}| - |I_{r}|} = \frac{|V_{f}|(1 + \rho_{v})}{|I_{f}|(1 + \rho_{i})} = |Z_{0}| \frac{1 + \rho_{v}}{1 - \rho_{v}}$$

In definitiva:

$$R_M = |Z_0| \cdot ROS$$

Analogamente si ricava che la resistenza minima:

$$R_{m} = V_{min}/I_{max} = \frac{\left|V_{f}\right| - \left|V_{r}\right|}{\left|I_{f}\right| + \left|I_{r}\right|}$$

Si ricava:

$$R_{m} = \frac{|Z_{0}|}{ROS}$$

Detto ϑ l'angolo di fase del numero complesso del coefficiente di riflessione $\overline{\rho}_v$, si può dimostrare che i ventri di tensione distano dal carico di una quantità *d* data dalla seguente relazione:

$$d = \frac{9 + 2n\pi}{2\beta}$$
 con $n = 0, 1, 2, ...$ (33)

Nei successivi paragrafi saranno analizzati due fondamentali configurazione di linee disadattate: la *linea chiusa in corto circuito* e la *linea con estremi aperti*.

In tali configurazioni, riportate in fig.8, si ha riflessione totale sul carico per cui l'onda riflessa ha ampiezza uguale a quella dell'onda diretta.



Fig. 8 a) Linea con estremo in corto circuito; b) Linea con estremo aperto.

2.5. Linea in corto circuito

La linea in corto circuito, detta anche *stub*, si ottiene ponendo $Z_u = 0$, come mostrato in fig.8a). In tal caso si ha:

$$\overline{\rho}_{v} = \frac{Z_{u} - Z_{0}}{Z_{u} + Z_{0}} = -1; \qquad \overline{\rho}_{i} = -\frac{Z_{u} - Z_{0}}{Z_{u} + Z_{0}} = 1; \qquad \text{ROS} = \infty$$
(34)

Poiché $\overline{\rho}_v = -1$ si deduce che in uscita la tensione diretta è in opposizione di fase con quella riflessa e ciò è evidente poiché, essendo $Z_u = 0$, anche $V_u = V_f + V_r = 0$ (nodo di tensione) e quindi $V_f = -V_r$; mentre $\overline{\rho}_i = 1$ sta ad indicare che in uscita la corrente diretta e quella riflessa sono in fase per cui è presente un ventre di corrente.

Le espressioni della tensione V(d), della corrente I(d) e dell'impedenza Z(d) ad una distanza d dall'uscita valgono, tenendo conto della (22) e (23)

(35)
$$V(d) = jZ_0I_u \operatorname{sen}\beta d; \qquad I(d) = I_u \cos\beta d; \qquad Z(d) = jZ_0 tg\beta d$$

dove I_u è la corrente di cortocircuito. L'impedenza della linea, in tal caso, è puramente reattiva e la suscettanza B, vale:

$$B = \frac{1}{Z} = -j\frac{1}{Z_0} ctg\beta d$$
(36)

In fig.9 si mostrano i tipici andamenti dell'ampiezza e della fase delle onde stazionarie di tensione e corrente per una linea in corto circuito.



Fig.9 Andamento dell'ampiezza e della fase della tensione e della corrente in una linea chiusa in cortocircuito.

2.6. Linea aperta

Quando l'uscita è un ramo aperto (fig.8b) si ha: $Z_u = \infty$. I coefficienti di riflessione e il ROS valgono:

$$\overline{\rho}_{v} = \frac{Z_{u} - Z_{0}}{Z_{u} + Z_{0}} = 1;$$
 $\overline{\rho}_{i} = -\frac{Z_{u} - Z_{0}}{Z_{u} + Z_{0}} = -1;$ ROS = ∞ (37)

Le precedenti relazioni mostrano che, in questo caso, la tensione diretta e riflessa sono in fase, mentre la corrente diretta e riflessa sono in opposizione di fase per cui in uscita si ha un ventre di tensione e nodo di corrente.

Per quanto riguarda la tensione, la corrente e l'impedenza in un punto a distanza d dall'uscita, si ha:

$$V(d) = V_u \cdot \cos\beta d; \quad I(d) = j \frac{V_u}{Z_0} \cdot \sin\beta d; \quad Z(d) = -j Z_0 \cdot \operatorname{ctg}\beta d \qquad (38)$$

Gli andamenti spaziali della tensione e della corrente delle onde stazionarie presenti in una linea aperta sono sostanzialmente identici a quelli di fig. 9 con la differenza di scambiare il grafico della corrente con quello della tensione.

2.7. Linea lunga $\lambda/4$ e linea lunga $\lambda/2$

Si definisce **linea in quarto d'onda** una linea di lunghezza $l = \lambda/4$ chiusa su un carico generico Z_u . Lo studio di tale linea è importante poiché essa è spesso impiegata per realizzare l'adattamento di impedenza e in tale applicazione è denominata *trasformatore di impedenza*. In fig. 10 si riporta una schematizzazione di una linea in quarto d'onda.



Fig. 10 Linea in quarto d'onda.

Tenendo conto delle (22) e (23) si ricava:

$$Z(d) = \frac{V(d)}{I(d)} = \frac{V_u \cdot \cos\beta d + jZ_0 I_u \cdot \sin\beta d}{I_u \cdot \cos\beta d + j\frac{V_u \cdot \sin\beta d}{Z_0}} = Z_0 \cdot \frac{Z_u + jZ_0 \cdot tg\beta d}{Z_0 + jZ_u \cdot tg\beta d}$$
(39)

Ponendo $\beta = 2\pi/\lambda$ e d = $\lambda/4$, la precedente espressione fornisce il valore dell'impedenza di ingresso della linea in quarto d'onda:

$$Z_{i} = \frac{Z_{0}^{2}}{Z_{u}}$$
(40)

Se la linea ha una lunghezza $l = \lambda/2$ ed è chiusa su un carico generico Z_u , l'impedenza d'ingresso vale:

 $Z_i = Z_{u.}$

Ciò si ricava facilmente ponendo nella (39) $\beta = 2\pi/\lambda$ e d = $\lambda/2$.

2.8. Adattamento di impedenza

Quando una linea di trasmissione è connessa ad un carico Z_u , si desidera che tutta la potenza che il generatore invia lungo la linea sia totalmente assorbita dall'utilizzatore.

Ciò si verifica se la linea è adattata cioè è chiusa su una impedenza $Z_u = Z_0$ per cui non vi sono onde riflesse. Infatti, la potenza assorbita dal carico Z_u si può esprimere come differenza tra la potenza apparente associata all'onda diretta e quella dell'onda riflessa:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\mathrm{f}} - \mathbf{P}_{\mathrm{r}} = \mathbf{V}_{\mathrm{f}} \cdot \mathbf{I}_{\mathrm{f}} - \mathbf{V}_{\mathrm{r}} \cdot \mathbf{I}_{\mathrm{r}}$$
(41)

Tenendo conto che i moduli dei coefficienti di riflessione della tensione e della corrente sono uguali tra loro la potenza riflessa si può porre nella forma:

$$P_r = V_r \cdot I_r = (\rho_v V_f) \cdot (\rho_i I_f) = \rho_v^2 \cdot P_f$$

Per cui:

 $P = P_{f'}(1 - \rho_v^2)$

Si definisce perdita di potenza per riflessione pr la seguente quantità:

$$p_r = 10 \cdot Log \frac{P_f}{P} = -10 \cdot Log (1 - \rho_v^2)$$
 [dB]

Ovviamente la potenza P è massima e la perdita di potenza per riflessione è nulla in assenza di riflessione.

Se $Z_u \neq Z_0$ si deve procedere all'adattamento di impedenza. I metodi impiegati nella pratica consistono nell'uso di una linea in quarto d'onda se il carico Z_u è puramente resistivo o di una linea in corto circuito (stub) per un carico generico.

2.8.1. Adattamento con linea in quarto d'onda

In fig.11a) si mostra una schematizzazione di un adattamento con linea in quarto d'onda. Si interpone nella parte terminale della linea un tronco di lunghezza $\lambda/4$ con caratteristiche elettriche diverse da quella della linea principale.



Fig.11a) Adattamento di impedenza con tronco di linea in $\lambda/4$.

Se Z_{01} è l'impedenza caratteristica del tronco in quarto d'onda, l'impedenza che la linea principale "vede" come carico effettivo è, per la (40):

$$Z_{i} = Z_{01}^{2} / R_{u}$$
 (42)

Scegliendo opportunamente il tronco di linea in quarto d'onda si può fare in modo che $Z_i = Z_0$ dove Z_0 è l'impedenza caratteristica della linea che si vuole adattare. Si ha, in tal caso:

$$Z_{01} = \sqrt{Z_0 \cdot R_u}$$

2.8.2. Adattamento con stub

Nel caso che l'utilizzatore Z_u sia un carico generico, per realizzare l'adattamento si impiega un tratto di linea di lunghezza ℓ chiuso in corto circuito e connesso ad una opportuna distanza *d* dal carico, come mostrato in fig. 11b).



Fig.11b) Adattamento di impedenza con stub.

Affinché vi sia adattamento, l'impedenza della linea "vista" da AB deve assumere un valore puramente resistivo pari a Z_0 . Lo stub (letteralmente "mozzicone") deve quindi trovarsi ad una distanza **d** dal carico tale che la componente resistiva dell'impedenza della linea in AB sia uguale a Z_0 . La lunghezza ℓ dello stub deve essere scelta in modo da assumere un valore di reattanza, data dalla (35), che neutralizzi quella che la linea presenta nei punti AB.

Per il dimensionamento, noti i valori di Z_u , Z_0 , e β si ricava, dalla (39), l'ammettenza Y(d) = 1 / Z(d) della linea a distanza *d* dal carico.

$$Y(d) = \frac{1}{Z_0} \cdot \frac{Z_0 + jZ_u \cdot tg\beta d}{Z_u + jZ_0 \cdot tg\beta d}$$
(43)

Sviluppando la (43) si ottiene:

$$Y(d) = \frac{1}{Z_0} \cdot \frac{1 - \rho_v^2}{1 + \rho_v^2 + 2\rho_v \cdot \cos(\vartheta - 2\beta d)} - j\frac{1}{Z_0} \cdot \frac{2\rho_v \cdot \sin(\vartheta - 2\beta d)}{1 + \rho_v^2 + 2\rho_v \cdot \cos(\vartheta - 2\beta d)}$$
(44)

Uguagliando la parte reale della (44) alla conduttanza caratteristica della linea $G_0=1/Z_0$ si può ricavare il valore della distanza d a cui inserire lo stub.

Si ottiene:

$$\cos(\vartheta - 2\beta d) = -\rho_v$$

da cui:

$$d = \frac{\vartheta - \arccos(-\rho_v)}{2\beta}$$
(45)

Tale valore si sostituisce nella parte immaginaria della (44) e si eguaglia la quantità così ottenuta cambiata di segno, con la suscettanza della linea in corto circuito, di lunghezza ℓ , data dalla (36). Si ottiene:

$$-j\frac{1}{Z_0} \cdot \cot g\beta \ell = j\frac{1}{Z_0} \cdot \frac{2\rho_v \operatorname{sen}(\vartheta - 2\beta d)}{1 + \rho_v^2 + 2\rho_v \cos(\vartheta - 2\beta d)}$$

Semplificando, si ha:

$$\cot g\beta \ell = -\frac{2\rho_v \operatorname{sen}(\vartheta - 2\beta d)}{1 - \rho_v^2}$$

Risolvendo si ottiene:

$$\ell = \frac{1}{\beta} \operatorname{arc} \operatorname{cot} g \left[-\frac{2\rho_{v} \operatorname{sen}(\vartheta - 2\beta d)}{1 - \rho_{v}^{2}} \right]$$
(46)

Le espressioni (45) e (46) consentono di risolvere il problema dell'adattamento con lo stub. In alternativa al metodo analitico esposto, per calcolare d ed ℓ dello stub, si può impiegare un metodo grafico che fa uso di un particolare diagramma noto come carta di Smith.

2.8.3 Collegamento tra linee sbilanciate e bilanciate

Una linea si dice bilanciata se i conduttori che costituiscono la linea presentano caratteristiche simmetriche rispetto al potenziale di terra. È questo il caso delle linee bifilari, come il doppino telefonico, nel quale il valore dell'impedenza tra ciascun conduttore e la terra risulta la stessa.

In caso contrario la linea si dice sbilanciata. Ciò accade, ad esempio, nel cavo coassiale dove la calza metallica è normalmente collegata a terra.

Se si deve collegare una linea sbilanciata ad una carico flottante o ad una linea bilanciata è necessario utilizzare delle soluzioni atte a garantire la simmetria del collegamento in modo da realizzare un perfetto adattamento. I dispositivi che realizzano tale adattamento sono denominati

BALUN (BALanced to UNbalanced adapter). Un classico esempio di connessione tra un cavo sbilanciato ed un carico bilanciato si ha nel collegamento tra un cavo coassiale ed un'antenna TV a dipolo ripiegato (antenna televisiva Yagi).

Per realizzare l'adattamento si utilizzano varie soluzioni. In fig. 12 si riportano due tra le più utilizzate nella pratica.



Fig. 12 Adattamento tra linea sbilanciata e linea o carico bilanciato.

Nel caso del Balun a trasformatore l'adattamento è realizzato attraverso un trasformatore con nucleo toroidale di ferrite sul cui primario è collegato il cavo coassiale. Il secondario consente di ottenere due correnti bilanciate che alimentano il carico. Il trasformatore, tra l'altro, consente anche un adattamento d'impedenza. È noto, infatti, che indicando con N₁ e N₂ il numero di spire del primario e del secondario la resistenza vista dal primario vale $(N_1/N_2)^2 \cdot R_L$. Dove si è indicato con R_L il valore della resistenza di carico.

È questo il classico caso del collegamento tra cavo coassiale sbilanciato a 75 Ω e antenna televisiva a dipolo ripiegato (carico bilanciato) con impedenza di 300 Ω . In questa applicazione il balun realizza anche l'adattamento d'impedenza.

Infatti, se si sceglie $N_1/N_2 = 1/2$ risulta che la resistenza vista dal primario è pari a $300\Omega/4 = 75\Omega$ esattamente uguale a quella del cavo di discesa TV.

Nel balun con linea lunga $\lambda/2$ l'adattamento si realizza impiegando un cavo dello stesso tipo di quello principale ma di lunghezza esattamente uguale a $\lambda/2$. La simmetria è assicurata dal

fatto che una linea di lunghezza $\lambda/2$ ha la proprietà di invertire la fase della tensione e della corrente in uscita rispetto a quelle di entrata. Inoltre, l'impedenza di entrata coincide con quella di carico. Anche questo tipo di balun realizza un adattamento di impedenza nel rapporto di ¹/₄. Infatti, i due estremi di uscita A e B oscillano con tensioni in opposizione di fase pertanto un eventuale carico Z_u collegato sui terminali di uscita si può considerare la serie di due impedenze di valore pari a $Z_u/2$ con il punto centrale a massa. L'impedenza del carico verso massa è, pertanto, il parallelo tra due impedenze uguali di valore $Z_u/2$. Tale parallelo vale $Z_u/4$. In tal modo un carico $Z_u = 300\Omega$ è visto dal cavo coassiale come una impedenza di 75 Ω .

2.9. Linea in regime impulsivo

Nei paragrafi precedenti si è analizzato il comportamento di una linea nel caso di segnali sinusoidali. Spesso, però, una linea è comandata da segnali di tipo impulsivo digitali caratterizzati da due soli livelli di tensione *basso* e *alto*. In questi casi l'analisi della propagazione del segnale è sviluppata con metodi diversi da quelli analizzati fin ora.

In questa sede sarà sviluppato, mediante un esempio numerico, il metodo di Bergeron.

Si consideri il collegamento di fig.13 in cui un generatore di segnale a gradino di ampiezza E = 5 V, e resistenza interna $R_s = 50 \Omega$ pilota, tramite una linea di lunghezza l= 5 m e impedenza caratteristica $Z_0 = 75 \Omega$, un carico resistivo $R_L = 150 \Omega$. Si suppone nota la velocità di propagazione u = $2.5 \cdot 10^8$ m/sec.



Fig.13 Trasmissione di un segnale digitale.

Nell'istante t = 0, nel quale si manifesta il fronte di salita del segnale di entrata, il generatore *vede* ai morsetti di entrata l'impedenza caratteristica della linea Z_0 e, pertanto, genera un'onda diretta di ampiezza:

$$V_i(0) = \frac{E \cdot Z_0}{R_s + Z_0} = \frac{5 \cdot 75}{125} = 3 V$$

Tale transizione si propaga lungo la linea e dopo un tempo t_p pari a:

$$t_p = \frac{1}{u} = \frac{5}{2.5 \cdot 10^8} = 20 \text{ nsec}$$

$$\rho_{\rm VL} = \frac{R_{\rm L} - Z_0}{R_{\rm L} + Z_0} = \frac{150 - 75}{150 + 75} = \frac{1}{3}$$

L'onda riflessa V_{or} che torna verso il generatore ha ampiezza:

$$V_{or}(t_p) = \rho_{VL} \cdot V_i(0) = 1 V$$

Nell'istante $t = t_p$ la tensione complessiva sul carico è la somma algebrica del segnale diretto e di quello riflesso:

$$V_0(t_p) = V_i(0) + V_{or}(t_p) = 3 + 1 = 4 V$$

Il segnale $V_{or}(t_p)$ torna verso il generatore e dopo un ulteriore tempo t_p giunge in entrata e subisce una ulteriore riflessione poiché $R_s \neq Z_0$. Il coefficiente di riflessione in entrata vale:

$$\rho_{\rm VS} = \frac{R_{\rm s} - Z_0}{R_{\rm s} + Z_0} = \frac{50 - 75}{50 + 75} = -0.2$$

L'ampiezza del corrispondente segnale riflesso, è:

$$V_{ir}(2t_p) = \rho_{VS} \cdot V_{or}(t_p) = -0.2 \cdot 1 = -0.2 V$$

Nell'istante 2t_p il segnale complessivo di entrata, vale:

$$V_i(2t_p) = V_i(0) + V_{or}(t_p) + V_{ir}(2t_p) = 3+1 - 0.2 = 3.8 V$$

Il segnale riflesso $V_{ir}(2t_p)$ ritorna verso il carico e dopo un tempo complessivo pari a $3t_p$ lo raggiunge e subisce una ulteriore riflessione generando il segnale:

$$V_{or}(3t_p) = \rho_{VL} \cdot V_{ir}(2t_p) = \frac{1}{3} \cdot (-0.2) = -0.0666$$

Il segnale complessivo sul carico vale:

$$V_o(3t_p) = V_o(t_p) + V_{ir}(2t_p) + V_{or}(3t_p) = 4 - 0.2 - 0.0666 = 3.733 V_{or}(3t_p) = 4 - 0.02 - 0.0666 = 3.733 V_{or}(3t_p) = 4 - 0.2 - 0.0666 = 3.733 V_{or}(3t_p) = 4 - 0.2 - 0.0666 = 3.733 V_{or}(3t_p) = 4 - 0.2 - 0.0666 = 3.733 V_{or}(3t_p) = 4 - 0.2 - 0.0666 = 3.733 V_{or}(3t_p) = 4 - 0.2 - 0.0666 = 3.733 V_{or}(3t_p) = 4 - 0.2 - 0.0666 = 3.733 V_{or}(3t_p) = 4 - 0.2 - 0.0666 = 3.733 V_{or}(3t_p) = 4 - 0.02 - 0.0666 = 3.733 V_{or}(3t_p) = 4 - 0.02 - 0.0666 = 3.733 V_{or}(3t_p) = 4 - 0.02 - 0.0666 = 3.733 V_{or}(3t_p) = 4 - 0.02 - 0.0666 = 3.733 V_{or}(3t_p) = 4 - 0.02 - 0.0666 = 3.733 V_{or}(3t_p) = 4 - 0.02 - 0.0666 = 3.733 V_{or}(3t_p) = 4 - 0.02 - 0.0666 = 3.733 V_{or}(3t_p) = 4 - 0.02 - 0.0666 = 3.733 V_{or}(3t_p) = 4 - 0.02 - 0.0666 = 3.733 V_{or}(3t_p) = 4 - 0.02 - 0.0666 = 3.733 V_{or}(3t_p) = 4 - 0.02 - 0.0666 = 3.733 V_{or}(3t_p) = 4 - 0.02 - 0.0666 = 3.733 V_{or}(3t_p) = 3 - 0.0666 = 3 - 0.0666 = 3 - 0.0666 = 3 - 0.0666 = 3 - 0.0666 = 3 - 0.0666 = 3 - 0.0666 = 3 - 0.0666 = 3 - 0.0666 = 3 - 0.0666 = 3 - 0.0666 = 3 - 0.0666 = 3 - 0.0666 = 3 - 0.0666 = 3 - 0.0666 = 3 - 0.0666 = 3 - 0.0666$$

Il segnale riflesso $V_{or}(3t_p)$ ritorna verso il generatore e subisce una ulteriore riflessione e il ciclo si ripete. E' facile verificare che:

$$V_i(4t_p) = 3.746 \text{ V} ; V_0(5t_p) \cong 3.75 \text{ V}$$

In fig.14 si riportano i diagrammi temporali di V_i e V_0 ottenuti al computer utilizzando un programma di simulazione.



Fig.14 Andamenti temporali di V_i e V₀ per il collegamento di fig.13.

Le tensioni $V_i(t)$ e $V_0(t)$ si possono ritenere a regime quando l'entità dei segnali riflessi è trascurabile. Essendo la linea priva di perdite, a transitorio esaurito, è assimilabile a un corto circuito ed il collegamento si riconduce a quello di fig.15.



 $V_0(\infty) = V_i(\infty) = \frac{E \cdot R_L}{R_s + R_L} = \frac{5 \cdot 150}{200} = 3.75 \text{ V}$

In questo caso la tensione sul carico si può ritenere a regime dopo un tempo di assestamento: $t_a \cong 5t_p = 100$ nsec.

Se il segnale di entrata commuta al livello basso E=0 si può ripetere l'analisi precedente ed è facile verificare che è necessario un tempo $t_a\cong100$ nsec, per ottenere la nuova situazione di regime: $V_i = V_0 = O$. Nel caso che V_s generi onde quadre per ottimizzare il collegamento è

necessario che il periodo T sia maggiore di $2 \cdot t_a$. Pertanto la massima frequenza fmax di lavoro, deve essere:

$$f_{max} < \frac{1}{2t_a}$$

Essendo $t_a = 100$ nsec., si ha:

 $f_{max} < 5 \text{ MHz}$

In pratica per migliorare la risposta in frequenza si realizza l'adattamento di impedenza. In fig. 16 si mostrano due semplici soluzioni.



La prima è impiegata quando $R_S < Z_0$ e consiste nell'inserire in serie al generatore una resistenza $R = Z_0 - R_S$ in modo da adattare il generatore alla linea. in tal caso, si ha al più una riflessione sul carico se $R_L \neq Z_0$.

La seconda soluzione è utilizzata quando $R_L > Z_0$ e consiste nell'inserire una terminazione in modo da adattare la linea al carico. In tal caso non si ha alcuna riflessione se $R_T / R_L = Z_0$.