



I.T.I. "Modesto PANETTI" – B A R I

Via Re David, 186 - 70125 BARI

☎ 080-542.54.12 - Fax 080-542.64.32

Internet <http://www.itispanetti.it> – email : BATF05000C@istruzione.it

STABILITÀ DEI SISTEMI

Metodo di Bode e Nyquist

INTRODUZIONE

La risposta di un sistema, sollecitato da segnali canonici, si compone di una risposta in transitorio e di una risposta a regime. Un buon sistema deve dare il valore della grandezza di uscita uguale, per quanto possibile, a quello desiderato.

È chiaro che in un sistema reale questo non è possibile a causa dei disturbi e delle eventuali semplificazioni effettuate per la costruzione del modello matematico. Questo comporta che fra il valore ideale e reale dell'uscita ci sarà sempre uno scostamento, detto **errore**, che deve essere il più piccolo possibile.

Un buon sistema deve avere, in oltre, una elevata **velocità di risposta**, ovvero deve essere in grado di raggiungere lo stato di regime molto rapidamente.

Infine, è necessario che l'ampiezza della **sovraperoscillazione**, o **overshoot**, sia molto limitata quando la risposta presenta oscillazioni.

L'errore, la velocità di risposta e l'overshoot, sono requisiti che si ricavano dall'analisi della **risposta nel dominio tempo**, mentre il **margin di fase**, il **margin di guadagno** e la **stabilità in frequenza** si ricavano dall'analisi della **risposta nel dominio della frequenza**.

STABILITÀ

La stabilità è la capacità di un sistema di raggiungere uno stato di equilibrio dopo una fase di regolazione.

La stabilità può essere studiata nel dominio del tempo e in quello della frequenza. Nel primo caso si osserva la risposta nel dominio del tempo, oppure la **posizione dei poli nel piano complesso s**. Nel secondo caso si tracciano i diagrammi di **Nyquist** e/o **Bode** della funzione di trasferimento ad anello aperto del sistema.

Dopo questa premessa, ci si sofferma sulla posizione dei poli nel piano complesso s e sui criteri di stabilità di Nyquist e di Bode che portano al tracciamento dei rispettivi grafici.

Posizione dei poli nel piano complesso s

È utile sapere, prima di analizzare la f.d.t. (funzione di trasferimento) ad anello aperto del sistema, la posizione dei poli della f.d.t. ad anello chiuso per stabilire, in primo luogo, se il sistema è stabile ad anello chiuso. Infatti un sistema stabile ad anello aperto non è detto che sia stabile ad anello chiuso e viceversa.

Considerata la f.d.t. ad anello chiuso

$$W(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

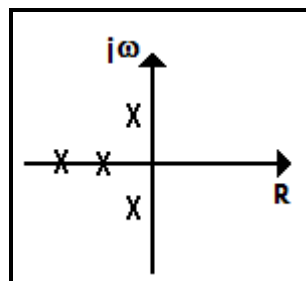
si dimostra che studiare la stabilità di un sistema significa analizzare la posizione dei poli della f.d.t. ad anello chiuso. Per verificare tale stabilità del sistema, si eguaglia a 0 il denominatore della $W(s)$:

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

Questa equazione è detta **equazione caratteristica**.

Dalle soluzioni dell'equazione caratteristica si possono distinguere tre casi di stabilità:

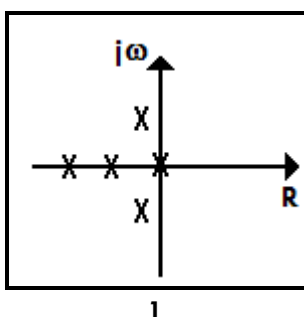
- **Il sistema è stabile asintoticamente** se tutti i poli della $W(s)$ sono reali negativi o complessi coniugati a parte reale negativa;



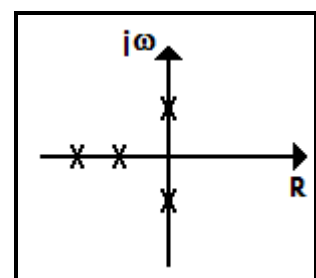
- **Il sistema è stabile marginalmente** se la $W(s)$ presenta:

1. un solo polo nell'origine;
2. una coppia di poli complessi coniugati a parte reale nulla.

(I poli rimanenti devono essere negativi se reali o a parte reale negativa se complessi coniugati)



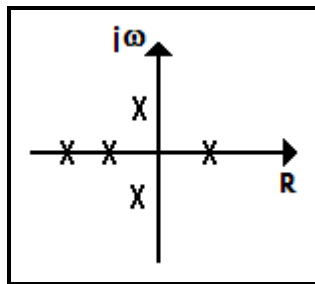
1



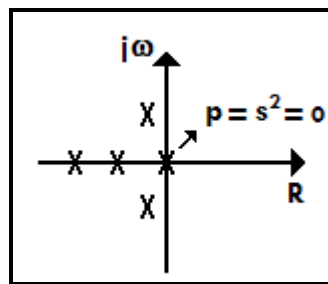
2

- **Il sistema è instabile** se la $W(s)$ presenta :

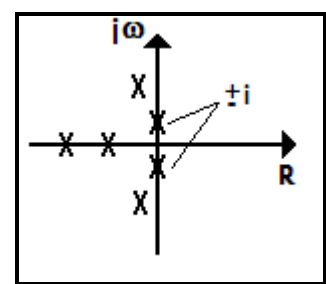
1. almeno un polo a parte reale positiva o complesso coniugato a parte reale positiva;
2. molteplicità di poli nulli;
3. molteplicità di poli complessi coniugati a parte reale nulla.



1



2



3

Si definisce **sistema a sfasamento minimo**, quel sistema che non presenta poli e zeri a parte reale positiva e che hanno al massimo un polo nullo o una coppia di poli complessi coniugati a parte reale nulla.

Forma canonica, forma a costanti di tempo e funzione armonica

Per applicare i vari criteri di stabilità, bisogna prima di tutto verificare che la $G(s)$ sia scritta in forma a costanti di tempo, ovvero che non sia scritta in forma canonica.

La $G(s)$ scritta in forma canonica si presenta nel seguente modo:

$$G(s) = \frac{k}{s + \tau}$$

La $G(s)$ scritta in forma a costanti di tempo si presenta nel seguente modo:

$$G(s) = \frac{k}{s \cdot \tau + 1}$$

dove k è il guadagno statico e τ è la costante di tempo.

Fatta questa operazione, bisogna trasformare la $G(s)$, scritta in forma a costanti di tempo, in funzione armonica, ovvero bisogna sostituire a s la variabile $j\omega$. La $G(s)$ assumerà la seguente forma:

$$G(j\omega) = \frac{k}{j\omega \cdot \tau + 1}$$

Risposta in frequenza

Studiare la risposta in frequenza significa studiare il comportamento del sistema al variare della pulsazione o della frequenza del segnale sinusoidale applicato in ingresso.

Lo studio della risposta in frequenza si riconduce all'analisi della variazione del modulo e della fase della $G(j\omega)$ al variare della pulsazione ω .

Infatti applicando in ingresso un segnale sinusoidale $e(t) = E \sin \omega t$, si può dimostrare che la risposta a transitorio esaurito è:

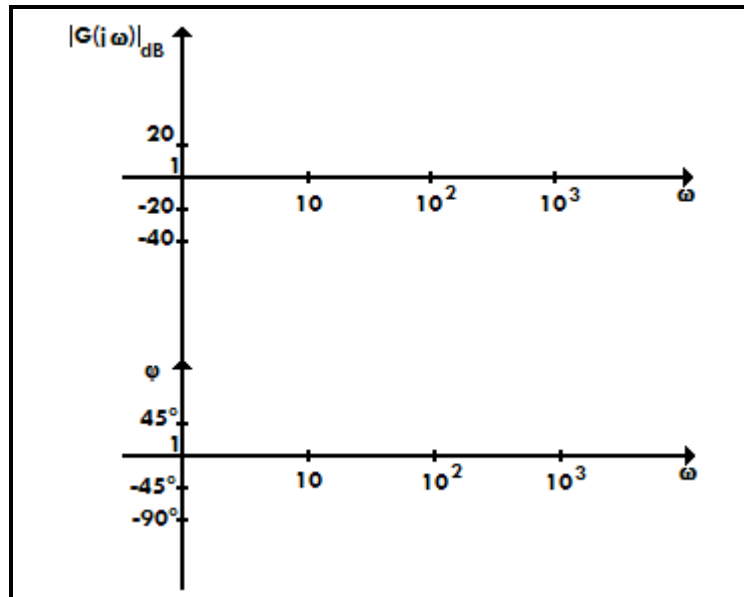
$$u(t) = E \cdot |G(j\omega)| \sin(\omega t + \varphi)$$

dove $|G(j\omega)|$ e φ sono rispettivamente il modulo e la fase della $G(j\omega)$.

Quindi dall'ultima espressione si nota che:

- la frequenza del segnale $u(t)$ è uguale a quella del segnale applicato;
- l'ampiezza del segnale $u(t)$ è uguale al prodotto $E \cdot |G(j\omega)|$;
- la fase φ di $u(t)$ è uguale alla fase di $G(j\omega)$.

Per analizzare la risposta in frequenza vengono utilizzati i diagrammi di Bode. Essi sono due: uno mette in relazione, su carta semilogaritmica, il modulo in decibel della $G(j\omega)$ e la pulsazione ω ; l'altro mette in relazione, sempre su carta semilogaritmica, la fase φ della $G(j\omega)$ e la pulsazione ω . I diagrammi di Bode si presentano nel seguente modo:



Viene definita **pulsazione caratteristica** ω_c il valore di ω in corrispondenza del quale avviene il cambiamento di pendenza del modulo. La pulsazione caratteristica vale:

$$\omega_c = \frac{1}{\tau}$$

Ogni polo introduce una pulsazione caratteristica che comporta una variazione di pendenza del modulo di -20 dB/dec. Ogni zero, invece, introduce una variazione di pendenza di 20 dB/dec. Quando il modulo taglia l'asse delle ascisse, individua una certa pulsazione chiamata **pulsazione di attraversamento o di crossover** ω , in corrispondenza della quale il modulo di $G(j\omega)$ è nullo. Il tracciamento di questi grafici è impegnativo, in quanto bisogna calcolare il modulo in decibel $|G(j\omega)|$ e la fase φ della $G(j\omega)$ e le pulsazioni caratteristiche introdotte dai poli e dagli zeri.

CRITERIO DI STABILITÀ DI NYQUIST

Si consideri la f.d.t. ad anello chiuso

$$W(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (1)$$

Supponendo che $G(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)}$ e che $H(s) = \frac{N_2(s)}{D_2(s)}$ e sostituendo nella (1) si ha che:

$$W(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{\frac{N_1(s)}{D_1(s)}}{1 + \frac{N_1(s)}{D_1(s)} \cdot \frac{N_2(s)}{D_2(s)}} = \frac{N_1(s)D_2(s)}{D_1(s)D_2(s) + N_1(s)N_2(s)}$$

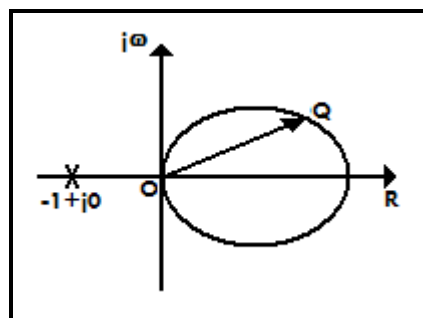
Si noti che la funzione caratteristica $F(s)$ assume la seguente forma:

$$F(s) = 1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{N_1(s)}{D_1(s)} \cdot \frac{N_2(s)}{D_2(s)} = \frac{D_1(s)D_2(s) + N_1(s)N_2(s)}{D_1(s)D_2(s)}$$

Dall'analisi effettuata si deduce che i poli della $W(s)$ sono gli zeri della funzione caratteristica $F(s)$.

Prendendo in considerazione il piano complesso s , in un sistema ad anello aperto avente la f.d.t. con poli a parte reale positiva, il numero degli zeri Z della funzione caratteristica è uguale alla somma dei poli a parte reale positiva P della $G(s)$ e dal numero delle rotazioni che compie il vettore rappresentativo $\overline{OQ}$ della funzione caratteristica in senso antiorario attorno al punto $-1 + j0$ con ω che varia fra $-\infty$ e $+\infty$.

$$Z = P + N$$



Un sistema a sfasamento minimo è stabile ad anello chiuso se il vettore rappresentativo $\overline{OQ}$ della funzione caratteristica non compie giri intorno al punto $-1 + j0$ quando varia ω da $-\infty$ a $+\infty$.

$$P = 0 \quad - \quad N = 0 \quad \rightarrow \quad Z = N + P = 0$$

Nei casi in cui risulta $Z \neq 0$ la funzione caratteristica $F(s)$ presenta zeri a parte reale positiva e quindi di conseguenza la f.d.t. ad anello chiuso $W(s)$ presenta poli a parte reale positiva causando l'instabilità del sistema.

In definitiva, un sistema ad anello aperto, secondo Nyquist, è stabile ad anello chiuso se soddisfa l'equazione $Z = N + P = 0$.

Tracciamento dei diagrammi di Nyquist

Per tracciare i diagrammi di Nyquist si deve innanzitutto calcolare il modulo e la fase di $G(j\omega)$ per $\omega = 0$ e per $\omega \rightarrow \infty$. Ottenuti i valori, si disegna il piano s e si segnano i due valori del modulo. Seguendo l'andamento della fase, si traccia l'andamento del modulo tramite una curva, il cui inizio è individuato dal valore del modulo in corrispondenza di $\omega = 0$ e la fine dal valore del modulo in corrispondenza di $\omega \rightarrow \infty$.

CRITERI DI STABILITÀ DI BODE

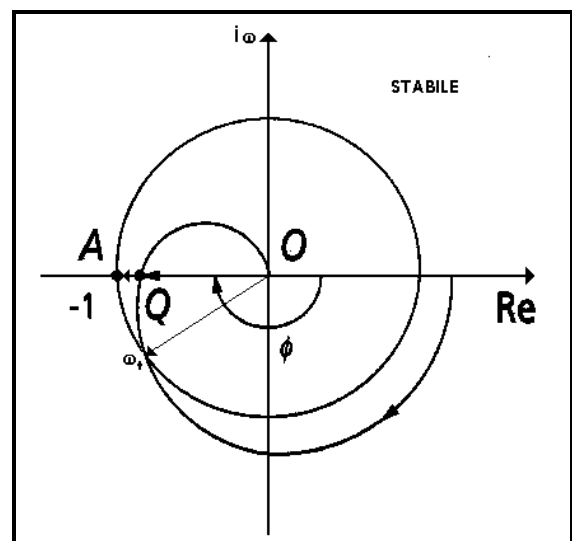
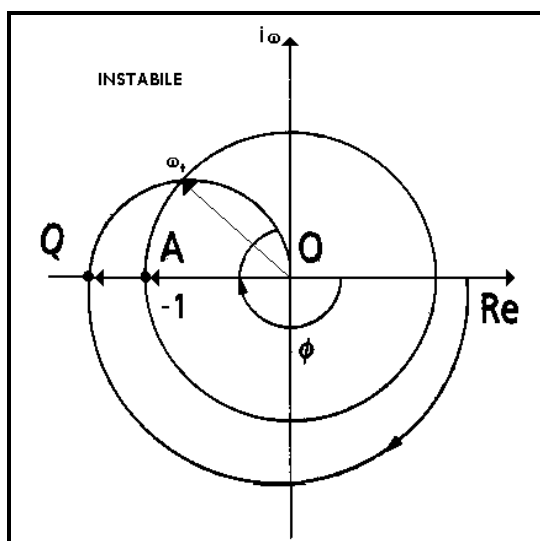
Criterio generalizzato di Bode

Dalla risposta in frequenza del sistema, si può estrapolare un primo criterio di stabilità, denominato **criterio generalizzato di Bode**. Esso fa riferimento alla pendenza che assume il modulo della funzione armonica. Si possono individuare tre casi:

1. se il modulo taglia l'asse delle ascisse con una pendenza di -20 dB/dec, il sistema è asintoticamente stabile ad anello chiuso;
2. se il modulo taglia l'asse delle ascisse con una pendenza di -40 dB/dec, non si può giudicare la stabilità del sistema se non introducendo il **criterio di stabilità Bode**;
3. se il modulo taglia l'asse delle ascisse con una pendenza di -60 dB/dec, il sistema è instabile ad anello chiuso.

Criterio di stabilità di Bode

Dai diagrammi polari di Nyquist di una funzione $G(s)$, a sfasamento minimo, si possono presentare due casi, rappresentati in figura.



Da queste figura si possono verificare le seguenti condizioni:

- $\varphi < 180^\circ$ e $\overline{OQ} < 1 \rightarrow$ sistema stabile;
- $\varphi = 180^\circ$ e $\overline{OQ} = 1 \rightarrow$ sistema al limite della stabilità;
- $\varphi > 180^\circ$ e $\overline{OQ} > 1 \rightarrow$ sistema instabile;

Il **criterio di stabilità di Bode** dice che un sistema, a sfasamento minimo stabile ad anello aperto, è stabile ad anello chiuso se la fase della $G(j\omega)$ calcolata in corrispondenza della pulsazione di crossover è ,in valore assoluto, minore di 180° .

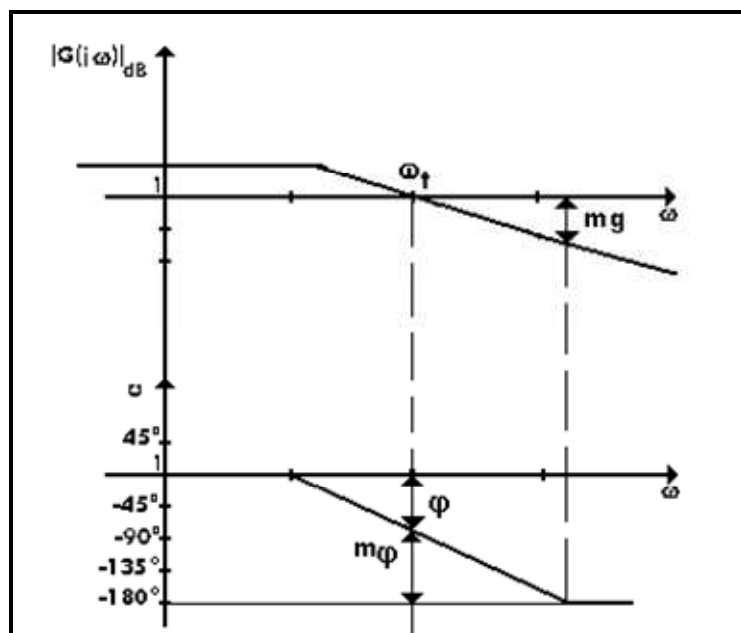
Si definisce **marginale di fase $m\varphi$** l'angolo ottenuto addizionando 180° e la fase φ della f.d.t. ad anello aperto calcolata in corrispondenza della pulsazione di attraversamento ω .

Si definisce **marginale di guadagno mg** il rapporto fra il vettore unitario $\overline{OA}$ e il vettore $\overline{OQ}$ calcolato in corrispondenza di $\varphi = -180^\circ$.

$$mg = \left| \frac{\overline{OA}}{\overline{OQ}} \right| = \left| \frac{1}{\overline{OQ}} \right|$$

$$m\varphi = 180^\circ - |\varphi|$$

Il margine di fase e di guadagno sono individuabili anche dai diagrammi di Bode come si può vedere in figura.



Il margine di guadagno lo si può anche esprimere in decibel utilizzando la seguente formula:

$$mg = 20 \log \left| \frac{\overline{OA}}{\overline{OQ}} \right|$$

I sistemi stabili hanno un margine di guadagno positivo e un margine di fase maggiore di 0° . Per una buona stabilità il margine di fase deve essere maggiore di 30° e il margine di guadagno deve essere maggiore di 10 dB.

I sistemi instabili hanno un margine di guadagno negativo e un margine di fase minore di 0° .

TECNICHE DI COMPENSAZIONE

Un sistema ad anello chiuso deve soddisfare delle specifiche assegnate nel dominio della frequenza e nel dominio del tempo. Spesso queste specifiche non vengono rispettate esattamente a causa di errori, disturbi e approssimazioni del modello matematico. Di seguito vengono proposte alcune tecniche per risolvere il problema nel dominio della frequenza.

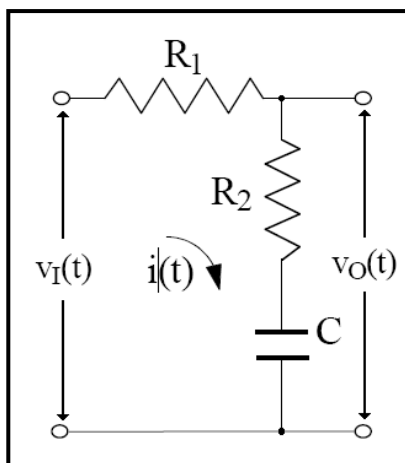
Le specifiche del dominio della frequenza sono la stabilità, la banda passante, il margine di fase e di guadagno. Se il sistema non è stabile e di conseguenza il margine di fase e di guadagno non sono quelli richiesti, è necessario modificare il sistema in modo che risponda ai requisiti richiesti, senza alterare, per quanto possibile, le caratteristiche del dominio del tempo.

In alcuni casi di instabilità, è sufficiente aumentare il guadagno statico del sistema. Questa tecnica, però, non è consigliabile, in quanto l'aumento del guadagno statico comporta un aumento dell'errore a regime.

Per una più accurata stabilizzazione è necessario introdurre, prima del sistema, delle reti, attive o passive, in grado di aumentare le prestazioni statiche e dinamiche. Le tre reti più utilizzate sono:

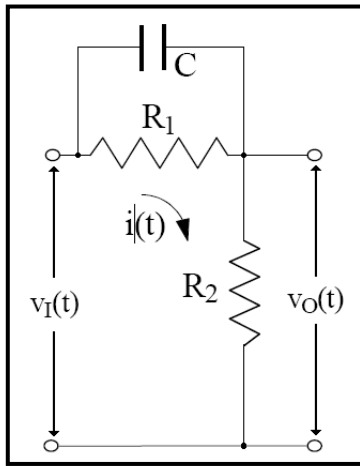
- Rete anticipatrice;
- Rete ritardatrice;
- Rete a sella.

Di seguito vengono riportati i circuiti elettrici passivi e le rispettive funzioni di trasferimento delle reti correttrici prima elencate.



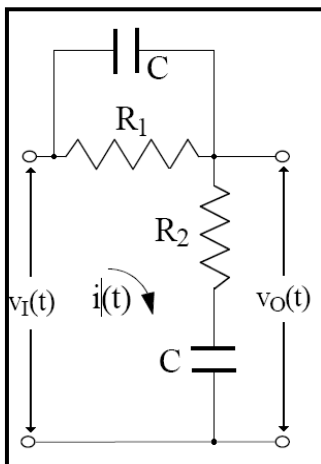
RETE RITARDATRICE

$$G(s) = \frac{s \cdot \tau_1 + 1}{s \cdot T_1 + 1}$$



RETE ANTICIPATRICE

$$G(s) = k \cdot \frac{s \cdot \tau_2 + 1}{s \cdot T_2 + 1}$$



RETE A SELLA

$$G(s) = \frac{(s \cdot \tau_1 + 1)(s \cdot \tau_2 + 1)}{(s \cdot \tau_1 + 1)(s \cdot \tau_2 + 1) + \tau_{12} \cdot s}$$

Con le reti correttrici si ha la possibilità di sfruttare la tecnica di annullamento polo/zero al fine di portare il diagramma del modulo di Bode a tagliare l'asse delle ascisse con una pendenza di -20 dB/dec. Anche se queste reti migliorano le prestazioni nel dominio della frequenza, hanno il difetto di limitare la banda passante del sistema che comporta un peggioramento della velocità di risposta. Nella pratica è conveniente utilizzare reti correttive attive utilizzando amplificatori operazionali.