

**Tratto dal  
CAPITOLO QUINTO  
Corso di Telecomunicazioni Volume I**

**Ettore Panella – Giuseppe Spalierno  
Edizioni Cupido -**

**Teoria della informazione**

**1. Elementi di teoria delle informazioni**

Trasmettere un messaggio equivale ad inviare delle informazioni relative ad un determinato evento.

La **quantità di informazione** associata ad un messaggio è legata al grado di incertezza sulla conoscenza del messaggio stesso e non al suo contenuto concettuale. In altre parole, da un punto di vista fisico il contenuto informativo di un messaggio prescinde dal fatto che esso sia vero o falso, giusto o sbagliato ma dipende soltanto dal numero di simboli necessari per descriverlo. Ad esempio, se desidera trasmettere un messaggio che indichi se una stanza è illuminata oppure se è buia, sarà sufficiente inviare solo due simboli; uno per indicare che c'è luce nella stanza, l'altro per indicare che la stanza è buia. In questo caso la trasmissione può essere realizzata mediante l'invio di un segnale elettrico nel quale i due simboli sono associati a due diversi valori di tensione o a due diversi valori di frequenza. Il ricevitore, che conosce il significato dei simboli, decodifica il segnale elettrico e interpreta i relativi valori come "luce nella stanza" oppure "buio nella stanza". L'esempio in esame si riferisce al caso più generale di **messaggi discreti**, cioè di quei messaggi che sono costituiti da un numero finito di **messaggi elementari** o **simboli** come "luce nella stanza" oppure "buio nella stanza". L'insieme di tutti i possibili simboli necessari per costruire un generico messaggio viene definito **alfabeto**.

Un messaggio è detto **continuo** se assume un numero illimitato di valori entro un certo intervallo di variabilità. Un esempio di messaggio continuo è la curva di tensione prodotta da un microfono quando è investito dalla voce o dalla musica. Inoltre, un messaggio è definito **equiprobabile** se tutti i simboli che lo compongono hanno la stessa probabilità di essere trasmessi.

L'esempio relativo a "luce nella stanza" o "buio nella stanza" si riferisce, quindi, alla trasmissione di un messaggio discreto ed equiprobabile costituito da due messaggi elementari. La **probabilità di trasmissione p** di uno dei due messaggi elementari è, pertanto del 50%, cioè:

$$p = \frac{1}{2}$$

Si definisce **incertezza i** sulla trasmissione l'inverso della probabilità:

$$i = \frac{1}{p}$$

Nel caso in esame l'incertezza è:  $i = 2$ .

Ai due stati elettrici del segnale da trasmettere, si possono attribuire i valori binari 0 e 1, caratteristici dell'elettronica digitale. Un elemento binario è quindi in grado di discriminare tra due diversi messaggi. Con 2 elementi binari si possono formare 4 combinazioni: 00, 01, 10, 11 e quindi distinguere quattro messaggi o simboli distinti, con 3 elementi binari si possono formare 8 combinazioni e così via. In generale con  $n$  elementi binari si possono distinguere un massimo di  $2^n$  simboli diversi.

Partendo da queste argomentazioni L. Hartley, nella seconda metà degli anni '40 introdusse il concetto di **quantità di informazione**  $J$  associata ad un messaggio e definì tale parametro come il numero minimo di elementi binari necessari per descrivere in modo non ambiguo tutti i simboli che compongono il messaggio stesso. A tale parametro, anche se è un numero puro, è stata attribuita una unità di misura: il **bit/simbolo** dove bit è l'acronimo di **binary digit**. Pertanto, diremo che la quantità di informazione associata ad un messaggio è  $J = n$  bit/simbolo, se sono necessarie  $n$  cifre binarie 0 e 1 per distinguere univocamente tutti i possibili simboli costituenti il messaggio da trasmettere.

Il numero massimo  $m$  di simboli che si possono discriminare con  $n$  bit è:

$$m = 2^n$$

La quantità di informazione  $J$  risulta:

$$n = J = \lg_2 m \quad [\text{bit/simbolo}]$$

(1)

La precedente relazione è nota come **formula di Hartley** ed è valida solo nel caso di messaggi discreti ed equiprobabili. La probabilità  $p$  associata al messaggio elementare vale:

$$p = \frac{1}{m}$$

Sostituendo (1) si ha:

$$J = \lg_2 m = \lg_2 \left( \frac{1}{p} \right) = \lg_2 \frac{1}{p}$$

La precedente relazione mostra come la quantità di informazione sia tanto più grande quanto minore è la probabilità  $p$  di trasmissione del messaggio elementare. In altri termini, se il numero  $m$  di messaggi elementari è elevato lo è anche il contenuto informativo associato al messaggio da trasmettere poiché risulta elevata l'incertezza con cui sono inviati i singoli simboli.

Utilizzando il sistema binario, per codificare  $m$  simboli necessitano  $n$  bit, in accordo alla relazione (1). Se applicando la (1) il numero  $n$  risulta non intero si dovrà considerare come numero di bit per la codifica l'intero  $n_i$  immediatamente superiore poiché non esistono le frazioni di bit. In tal caso, però, la codifica degli  $n_i$  bit ha una capacità informativa maggiore di quella effettiva. Si definisce **efficienza di codifica** e si indica con  $\eta_c$  il rapporto:

$$\eta_c = \frac{n}{n_i} \quad (2)$$

**Esempio n.1**

Una centrale telefonica serve una utenza di 20000 abbonati. Ad ogni abbonato è associato un numero di 5 cifre. Calcolare la quantità di informazione associata al numero telefonico.

*Risoluzione*

Ogni cifra del numero telefonico è decimale e può assumere tutti i valori compresi tra 0 e 9. Essendo 5 le cifre i possibili numeri telefonici sono  $10^5$  e, nell'ipotesi di numeri equiprobabili, la quantità di informazione risulta:

$$J = \log_2 10^5 = 16.5 \text{ bit/simbolo}$$

La quantità di informazione associata ai soli numeri effettivamente utilizzabili è minore di quella di tutti i possibili numeri e vale:

$$J = \log_2 20000 = 14.3 \text{ bit/simbolo}$$

Nel 1949 Shannon ha ampliato la teoria di Hartley studiando la trasmissione di messaggi discreti non equiprobabili. In tal caso, indicando con  $p_i$  la probabilità del messaggio  $i$ -esimo, la quantità di informazione associata vale:

$$J_i = \lg_2\left(\frac{1}{p_i}\right) \quad [\text{bit/simbolo}]$$

Se i messaggi sono  $N$  la quantità media di informazione risulta:

$$H = \sum_{i=1}^N \left( p_i \cdot \log_2 \frac{1}{p_i} \right) \quad [\text{bit/simbolo}] \quad (3)$$

La quantità  $H$  è denominata **entropia** del messaggio. L'espressione (3) è nota come **formula di Shannon**. In altre parole, se un sistema di trasmissione emette  $N$  simboli, la quantità di informazione associata dipende dalla probabilità di emissione dei simboli. Se un trasmettitore inviasse sempre lo stesso simbolo, il ricevitore non avrebbe alcuna incertezza nella ricezione ( $p=1$ ) e pertanto la quantità di informazione associata sarebbe nulla. Nel caso di messaggi equiprobabili:  $p_1 = p_2 = \dots = p_N = 1/N$ , la formula di Shannon coincide con quella di Hartley, infatti:

$$H = \sum_{i=1}^N \left( p_i \cdot \log_2 \frac{1}{p_i} \right) = N \cdot p \cdot \lg_2 \frac{1}{p} = \lg_2 \frac{1}{p} \quad (4)$$

Si può dimostrare, inoltre, che nel caso di messaggi equiprobabili la precedente relazione fornisce il valore massimo  $H_{\max}$  che può assumere l'entropia. Tale risultato si ottiene ponendo uguale a zero la derivata prima della (3) nell'ipotesi di messaggi

equiprobabili. La diversa probabilità di emissione dei simboli costituenti un messaggio diminuisce, pertanto, la quantità di informazione del messaggio stesso poiché introduce una **ridondanza R** definita dalla seguente relazione.

$$R = 1 - \frac{H}{H_{\max}} \quad (5)$$

Ovviamente  $R=0$  per un messaggio costituito da simboli equiprobabili nei quali  $H = H_{\max}$ .

### Esempio n.2

Determinare la quantità di informazione associata ad una lettera dell'alfabeto e quella associata alla parola MARE.

#### Risoluzione

Assumendo che le lettere dell'alfabeto siano 26 la quantità di informazione associata risulta:

$$J = \log_2 26 = 4.7 \text{ bit/simbolo}$$

Sono necessari, pertanto, 5 bit che con le  $2^5 = 32$  combinazioni possono sicuramente codificare le 26 lettere dell'alfabeto. L'efficienza di codifica risulta:

$$\eta_c = \frac{n}{n_i} = \frac{4.7}{5} = 0.94$$

In percentuale  $\eta_c\% = 94\%$ .

La parola MARE è costituita da 4 delle 26 lettere dell'alfabeto e le possibili combinazioni con ripetizione che si possono realizzare sono  $26^4$  per cui:

$$J = \log_2 26^4 = 18.8 \text{ bit/simbolo}$$

La quantità di informazione associata alla parola MARE risulta estremamente elevata poiché le combinazioni che si possono formare con 4 lettere sono moltissime. Di tali combinazioni numerose sono quelle prive di significato e le altre non hanno la stessa probabilità di essere trasmesse che, tra l'altro, dipende dalla lingua e dal contenuto del testo (scientifico, commerciale, ecc.). Si comprende, quindi, che il calcolo effettivo della quantità di informazione associata ad un generico testo è molto complesso e a tale parametro si dà il nome di **entropia della lingua**. In pratica, il modo più semplice per trasmettere un testo è quello di inviare i singoli caratteri alfanumerici impiegando opportuni codici, come ad esempio il codice ASCII.

## 1.1. Messaggi continui

La trasmissione di messaggi continui, come immagini o suoni, è un caso molto diffuso nelle telecomunicazioni. Il segnale elettrico generato da un microfono costituisce un classico esempio di segnale continuo che può assumere infiniti valori di tensione entro il range di lavoro del dispositivo. Gli attuali sistemi di trasmissione delle informazioni sono orientati all'utilizzo di tecniche numeriche quali la tecnica PCM (Pulse Code Modulation) discussa nel II capitolo del 2° volume. Pertanto, le informazioni di tipo analogico dovranno essere trasformate in forma numerica. La trasformazione dalla forma analogica a quella numerica consiste, sostanzialmente, nel prelevare un numero limitato ma significativo di valori del segnale analogico, denominati *campioni*, e trasmettere solo tali informazioni. Il ricevitore utilizzando i campioni ricevuti sarà in grado di ricostruire in modo più o meno accettabile l'informazione analogica. In pratica ci si accontenta di un numero limitato di campioni del segnale analogico poiché, fortunatamente, la vista e l'udito dell'uomo non riescono a distinguere variazioni inferiori a determinate soglie percettive.

- **Digitalizzazione delle immagini.** In fig.1 si mostra la rappresentazione di una generica immagine riportata su un foglio quadrettato.

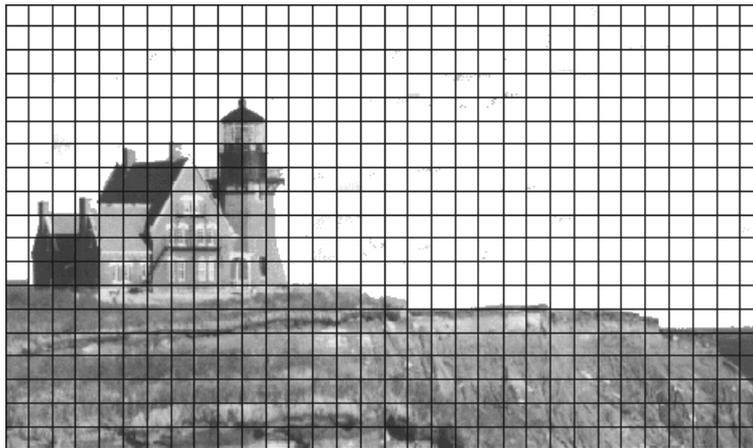


Fig.1

La dimensione dell'immagine lungo l'asse delle ascisse è  $X$  ed è divisa in  $m$  parti, mentre quella relativa alle ordinate è  $Y$  ed è divisa in  $n$  parti. Il reticolo su cui è disegnata l'immagine è, pertanto, formato da  $m \cdot n$  quadretti denominati **pixel**. Ad ogni singolo pixel devono essere associati almeno tre campi informativi: ascissa, ordinata e colore. I primi due individuano la posizione spaziale del pixel nell'immagine e rappresentano la *risoluzione spaziale* il terzo, denominato *risoluzione cromatica*, ne caratterizza il colore. La più semplice attribuzione del *campo colore* è di un solo bit 0 o 1 per indicare se quel pixel è bianco o nero. Se si vogliono attribuire diverse tonalità di grigi o di colori sarà necessario utilizzare un maggior numero di bit. Tralasciando l'aspetto relativo al colore, la risoluzione dell'immagine può essere aumentata solo aumentando il numero  $m$  ed  $n$  in cui dividono le dimensioni  $X$  e  $Y$ ; cioè aumentando il numero di pixel dell'immagine. In questo modo l'immagine è stata trasformata da continua in discreta con un numero di elementi pari al numero di pixel. La procedura della divisione in pixel è del tutto equivalente a quella impiegata per la costruzione di

un puzzle. Un reticolo a  $m \cdot n$  pixel è in grado di rappresentare  $m \cdot 2^n$  immagini diverse poiché ad ogni ascissa si possono far corrispondere  $2^n$  possibili combinazioni di quadrettatura del reticolo con colore bianco o nero. La quantità di informazione associata al reticolo si valuta con la formula di Hartley:

$$J = \lg_2 (m \cdot 2^n)$$

Un sistema per la trasmissione delle immagini in bianco e nero che impiega la normale rete di telecomunicazioni è il terminale **facsimile** o **fax**. Il modello attualmente più in uso, noto come *fax di gruppo 3*, è di tipo digitale ed è conforme alla normativa T4 dell'ITU-T. Esso è in grado di trasmettere un documento in formato A4 in circa un minuto. Il documento è digitalizzato da una sistema elettro-ottico a scansione che impiega un sensore a CCD (Charge Coupled Device) con 1728 elementi che leggono altrettanti punti di una linea lunga 215 mm. La risoluzione orizzontale è, pertanto, di 1728/215 corrispondente a circa 8.04 punti per millimetro. La risoluzione verticale tra le diverse linee può essere di due tipi: la standard con 3.85 linee/mm e l'alta risoluzione con 7.7 linee/mm. I dati letti dal sensore a CCD sono trasformati in forma digitale in modo da associare ad un punto bianco il livello logico 0 e ad un punto nero il livello logico 1. Un circuito a soglia decide se il valore letto dal sensore ottico deve essere considerato 0 o 1. I dati digitali così ottenuti subiscono un processo di compressione mediante un particolare codice di Huffman che associa alle diverse sequenze di 0 e 1 dei codici a minor numero di bit. Il fattore di compressione è in media di circa 1:10 in modo che ad una riga di 1728 bit si fanno corrispondere circa 200 bit. In tabella 1 si riportano, a titolo di esempio, i codici di Huffman relativi ad alcune sequenze di bianchi e neri.

**Tabella 1**  
**Codici di Huffman**

Sequenze bit bianco	Codice	Sequenze bit nero	Codice
0	00110101	0	0000110111
1	000111	1	010
2	0111	2	11
3	1000	3	10
4	1011	4	011
5	1100	5	0011
6	1110	6	0010
7	1111	7	00011
8	10011	8	000101
9	10100	9	000100
10	00111	10	0000100
15	110101	15	000011000
30	0000011	30	00001101000
60	01001011	60	000000101100
960	011010100	960	0000001110011
1600	010011010	1600	0000001011011
1728	010011011	1728	0000001100101

Altri strumenti usati per l'acquisizione delle immagini sono gli scanner e le fotocamere digitali che operano con risoluzioni hardware variabili dai 300 ai 1600 dpi (dot per inch).

Per quanto riguarda il numero di colori, esistono modelli a tonalità di grigio (8 bit) e modelli che arrivano a oltre 16 milioni di colori (24 bit).

- **Digitalizzazione dei suoni.** La digitalizzazione dei suoni è ampiamente utilizzata nei sistemi di telecomunicazioni che impiegano la tecnica PCM per trasmissione della fonia. Il segnale generato dall'apparecchio telefonico, quando giunge in centrale, attraversa dei circuiti filtranti, denominati **filtri di precampionamento**, che ne delimitano la banda nell'intervallo di frequenza 300-3400 Hz. Tale segnale ha

un'ampiezza tipicamente compresa tra -60 dBm e +3 dBm (ovvero, tra 0.775 mV e 1 V); si ricordi che il parlatore medio produce un segnale di ampiezza di circa -15 dBm. Il segnale fonico è pertanto limitato nelle ampiezze e nelle frequenze. In fig. 2 si riporta, su un foglio quadrettato, una generica rappresentazione di un segnale continuo variabile nel tempo.

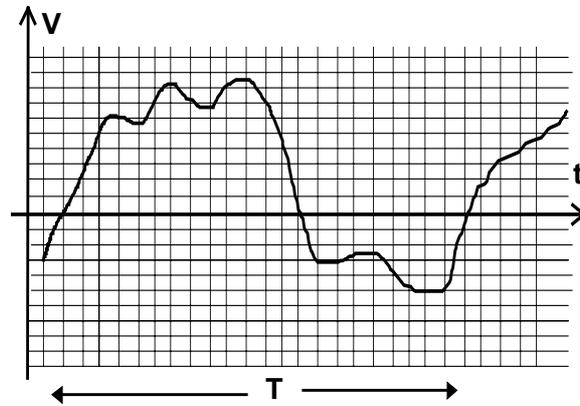


Fig.2 Rappresentazione di un generico segnale variabile nel tempo.

Per trasformare un segnale continuo variabile nel tempo in uno discreto nel tempo e nelle ampiezze si utilizza lo stesso procedimento logico impiegato nella digitalizzazione di una immagine. In altre parole anche per digitalizzare un segnale continuo si deve prelevare un numero sufficiente di campioni in un prefissato intervallo di tempo. Tale numero si valuta mediante il noto teorema del campionamento di C.E.Shannon ampiamente descritto nel capitolo II del 2° volume. Il teorema di Shannon afferma che un segnale con spettro in frequenza limitato al valore  $f_{\max}$  può essere completamente rappresentato se nell'intervallo di tempo unitario, ad esempio  $T = 1$  sec, si preleva un numero di campioni pari ad almeno il doppio del valore della frequenza  $f_{\max}$ . Nel caso del segnale fonico, essendo  $f_{\max} = 3400$  Hz, si devono prelevare almeno 6400 campioni/sec. Le norme dell'ITU-T hanno stabilito un valore di 8000 campioni/sec; pertanto la frequenza  $f_c = 8$  KHz rappresenta la *frequenza di campionamento* a cui devono lavorare i sistemi telefonici in tecnica PCM. L'intervallo di tempo tra due campioni successivi vale:

$$T_c = \frac{1}{f_c} = 125 \mu\text{sec}$$

Per quanto concerne l'asse delle ordinate le norme dell'ITU-T hanno stabilito, anche mediante numerosi studi sperimentali, di suddividere l'intervallo delle ampiezze in 256 parti. Ciò si realizza mediante un *processo di quantizzazione* che associa ad ogni campione uno dei 256 valori in cui resta diviso l'intervallo di variabilità delle ampiezze. Il processo di quantizzazione è ottenuto con un *convertitore analogico-digitale* a 8 bit. Nel caso della fig.2, indicando con  $m$  il numero di divisioni associate al tempo unitario  $T$ , e con  $n$  il numero di divisioni dell'asse delle ordinate, il numero complessivo di funzioni rappresentabile da tale reticolo vale  $m \cdot n$  poiché si può prelevare un solo campione ad intervalli regolari di tempo  $T_c$ . La quantità di informazione associata vale:

$$J = \lg_2 (m \cdot n)$$

Nei sistemi di digitalizzazione della musica, come nei CD musicali, dove si richiede una elevata fedeltà nella riproduzione dei suoni si impiega una frequenza di campionamento di 44.1 KHz notevolmente più elevata degli 8 KHz della telefonia. Anche la

discretizzazione delle ampiezze risulta aumentata e, tipicamente, non è inferiore a 16 bit. Per il campionamento dei suoni, mediante computer, ci si avvale di *schede audio* in grado di acquisire il segnale sonoro sia in modalità mono che stereo. La risoluzione e la frequenza di campionamento sono selezionabili via software. Valori tipici sono: 8, 16 o 32 bit per quanto concerne la risoluzione, mentre la frequenza di campionamento si può scegliere tra 8 KHz, 22 KHz, o 44.1 KHz.

## 2. Velocità di trasmissione. Baud Rate

Si è detto che l'entropia associata ad una sorgente di simboli individua, sostanzialmente, il numero di bit necessari per rappresentare tutti i simboli che costituiscono il messaggio. Ogni simbolo, pertanto, sarà rappresentato da uno o più bit. Queste considerazioni portano a definire due velocità di trasmissione, una denominata **velocità di trasmissione dei simboli** o velocità di trasmissione del segnale e l'altra **velocità di trasmissione dell'informazione**. La velocità di trasmissione dell'informazione  $V_i$  misurata in bit/sec è legata alla velocità di trasmissione dei simboli  $V_s$ , misurata in simboli/sec. o in **baud**, in onore di J. Baudot, dalla seguente

$$V_i = H \cdot V_s \quad [\text{bit/sec}] \quad (6)$$

La velocità di trasmissione dell'informazione bit/sec, spesso è indicata con bps (bit per secondo).

Se l'entropia  $H=1$  allora i bps coincidono con i baud. Ciò accade se ad ogni simbolo è associato un solo bit. Ad esempio, si consideri la fig.3 che riporta il diagramma di tempificazione del byte 11001011 trasmesso nel tempo di 8msec. Il tempo dedicato a ciascun simbolo, indicato con  $T_b$ , è di 1msec e in tale intervallo di tempo è trasmesso un simbolo costituito da un solo bit 0 o 1. In questa caso l'entropia  $H= 1$  e la velocità di trasmissione del segnale coincide con quella dell'informazione:

$$V_s = V_i = \frac{8 \text{ bit}}{8 \text{ msec}} = 1 \text{ Kbps} = 1 \text{ Kbaud}$$

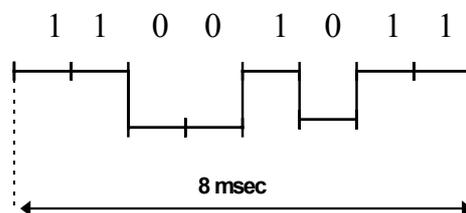


Fig.3 Tempificazione di un segnale digitale a 2 livelli.

Esistono altri metodi di trasmissione che utilizzano delle tecniche, denominate **multilivello**, in grado di associare più simboli binari nello stesso intervallo temporale  $T_b$ . Ad esempio, supponiamo di impiegare un sistema multilivello a 4 livelli di tensione in modo da raggruppare l'informazione binaria mediante la seguente tabella 2.

Tabella 2

Bit	Valore di tensione (Volt)
00	0
01	1

10	2
11	3

La precedente struttura multilivello è detta **Dibit** poiché i bit sono presi a gruppi di due. In questo caso la trasmissione del byte 11001011 richiede un tempo di 4msec. come mostrato nel diagramma di tempificazione di fig.4.

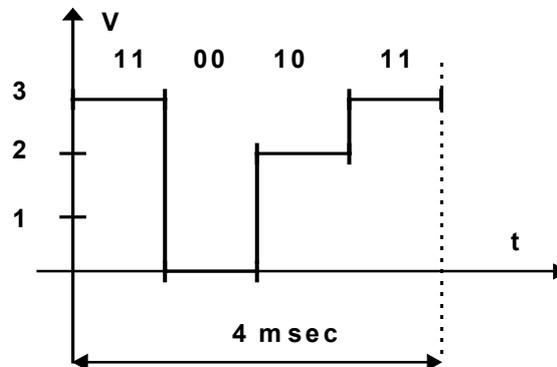


Fig.4 Diagramma di tempificazione di un sistema a 4 livelli.

In questo caso ad ogni simbolo, costituito da 2 bit, è dedicato sempre un tempo  $T_b$  di 1msec per cui la velocità di trasmissione del segnale è sempre di 1 Kbaud ma, essendo l'entropia  $H = 2$ , la velocità di trasmissione dell'informazione risulta:

$$V_i = H \cdot V_s = 2 \text{ Kbps}$$

Quindi, un sistema dibit ha una velocità di trasmissione dell'informazione doppia di quella del segnale. In un sistema **tribit** (8 livelli) la  $V_i$  sarà il triplo della  $V_s$  e così via. Nella pratica esistono particolari metodi di modulazione dei segnali che consentono di realizzare sistemi multilivello ad elevato numero di livelli. Queste tecniche di trasmissione sono ampiamente utilizzate nelle modulazioni digitali PSK e QAM sviluppate nel I capitolo del 2° volume.

In generale, se un sistema di trasmissione impiega un tecnica multilivello a  $L$  livelli, la relazione che consente di determinare la velocità di trasmissione dell'informazione  $V_i$ , [bps] nota quella di trasmissione del segnale  $V_s$  [baud], si esprime nel seguente modo:

$$V_i \text{ [bps]} = V_s \text{ [baud]} \cdot \lg_2 L \quad (7)$$

La precedente relazione è del tutto equivalente alla (6).

### Esempio n.3

Un sistema di trasmissione deve inviare ad un apparato ricevente 4 simboli indicati genericamente con A, B, C, D. La probabilità di trasmissione associata a ciascun simbolo è:

$p_A = 0.7$ ;  $p_B = 0.2$ ;  $p_C = 0.08$ ;  $p_D = 0.02$ . Sapendo che la velocità di trasmissione dei simboli è  $V_s = 2000$  baud, determinare:

1. l'entropia  $H$  e  $H_{\max}$  ;

2. l'efficienza di codifica;
3. la ridondanza nella codifica;
4. la velocità di trasmissione dell'informazione

#### Risoluzione

L'entropia H si calcola applicando la (4):

$$H = 0.7 \log_2 \frac{1}{0.7} + 0.2 \log_2 \frac{1}{0.2} + 0.08 \log_2 \frac{1}{0.08} + 0.02 \log_2 \frac{1}{0.02} = 1.33 \text{ bit/simbolo}$$

L'entropia massima si ha nel caso che i 4 simboli siano equiprobabili con  $p=1/4$ . Si ha:

$$H_{\max} = \log_2 4 = 2 \text{ bit/simbolo}$$

L'efficienza di codifica risulta:

$$\eta_c = \frac{1.33}{2} = 0.665$$

La ridondanza nella codifica vale:

$$R = 1 - \frac{H}{H_{\max}} = 1 - 0.665 = 0.335$$

La velocità di trasmissione dell'informazione  $V_i$  risulta:

$$V_i = H \cdot V_s = 1.33 \cdot 2000 = 2660 \text{ bps}$$

In realtà i bit effettivamente necessari sono 2 (non esistono frazioni di bit) pertanto, la effettiva velocità di trasmissione dell'informazione risulta:

$$V = H_{\max} \cdot V_s = 2 \cdot 2000 = 4000 \text{ bps}$$

#### Esempio n.4

Un apparato trasmittente invia, lungo un canale di comunicazione, un messaggio ad una velocità di linea  $V_s = 2400$  baud. Determinare la velocità di trasmissione delle informazioni  $V_i$  in bps nel caso di trasmissione a 2, 4, 8, 16 livelli.

#### Risoluzione

La velocità di trasmissione dell'informazione è legata a quella del segnale dalla relazione:

$$V_i [\text{bps}] = V_s [\text{baud}] \cdot \lg_2 L$$

Nel sistema di trasmissione a 2 livelli, con diagramma di tempificazione del tipo di fig.1, ad ogni simbolo è associato un solo bit per cui  $V_i = V_s$ :

$$V_i = 2400 \cdot \lg_2 2 = 2400 \text{ bps}$$

Nel sistema a 4 livelli, denominato **dibit**, con diagramma di tempificazione del tipo di fig.2, la velocità  $V_i$  risulta:

$$V_i = 2400 \cdot \lg_2 4 = 4800 \text{ bps}$$

Nel sistema a 8 livelli, denominato **tribit**, ad ogni simbolo sono associati 3 bit per cui la velocità  $V_i$  risulta:

$$V_i = 2400 \cdot \lg_2 8 = 7200 \text{ bps}$$

Nel sistema a 16 livelli, denominato **quadribit**, ad ogni simbolo sono associati 4 bit per cui la velocità  $V_i$  risulta:

$$V_i = 2400 \cdot \lg_2 16 = 9600 \text{ bps}$$

### 3. Capacità di un canale di comunicazione

Col termine **canale di comunicazione** si intende un qualunque mezzo che consente lo scambio di informazioni, analogiche o digitali, tra due apparati denominati trasmettitore TX e ricevitore RX. Classici esempi di canali di comunicazione sono le linee in rame (doppino telefonico, cavo coassiale) le fibre ottiche e lo spazio (grazie all'impiego di antenne ricetrasmittenti). Ogni canale di comunicazione è caratterizzato da una propria larghezza di banda  $B$  [Hz] che definisce la banda di frequenza entro cui la trasmissione dell'informazione avviene correttamente con una ben determinata attenuazione del segnale. La larghezza di banda dipende da diversi fattori quali:

tipo di materiale;

tecnologia costruttiva;

dimensioni geometriche del dispositivo di trasmissione;

inserimento di circuiti filtranti;

eventuale presenza di giunti;

caratteristiche ambientali (temperatura, umidità, ecc.)

Nell'ipotesi semplificata di *canale ideale* privo di rumore, Nyquist ha dimostrato che la capacità di trasmissione  $C$ , intesa come massima velocità di trasmissione dell'informazione in bps, è legata alla banda passante del canale dalla semplice relazione:

$$C = 2B \cdot \lg_2 L \quad (8)$$

La (8) discende dalla (7) ponendo:  $C = V_i$ [bps] e  $2B = V_s$ [baud]

Nel caso di trasmissione di un segnale binario a due livelli 0 e 1 per simbolo, la precedente relazione diventa:

$$C = 2 \cdot B \quad [\text{bps}] \quad (9)$$

Questo risultato è intuitivo. Infatti, se consideriamo un segnale sinusoidale a frequenza  $f$  ad ogni periodo  $T = 1/f$  è possibile associare 2 bit: il bit 1 alla semionda positiva e il bit 0 a quella negativa. Ciò equivale alla trasmissione di  $2 \cdot f$  bit/sec.

Ad esempio, su un canale di comunicazione con banda passante  $B = 4$  KHz, si può inviare un segnale binario ad 8 Kbps.

L'ipotesi di canale privo di rumore è del tutto ideale, poiché nella pratica è sempre presente del rumore  $N$  (Noise) che si sovrappone al segnale utile  $S$  (Signal). In questo caso la capacità di trasmissione delle informazioni del canale dipende anche dal rapporto segnale/rumore  $S/N$  che si desidera avere nel collegamento. Nell'ipotesi di rumore bianco, cioè di rumore distribuito equamente su tutta la gamma di frequenze interessate al collegamento, si dimostra che vale la seguente relazione di Shannon:

$$C = B \cdot \log_2 \left( 1 + \frac{S}{N} \right) \quad [\text{bps}] \quad (10)$$

La precedente relazione fornisce la massima velocità di trasmissione dell'informazione nel canale di comunicazione ma nulla dice sul numero di livelli del segnale in linea. Tale numero si deve ricavare applicando la (8) altrimenti si ottiene un risultato completamente errato. Infatti, riconsideriamo l'esempio precedente che, per un canale ideale, con  $B = 4$  KHz fornisce  $C = 8$  Kbps e supponiamo che il canale sia rumoroso e che si desideri un rapporto  $S/N$  pari a 1000. Applicando la (10) si ha:

$$C = 4 \cdot 10^3 \cdot \lg_2(1 + 1000) = 39.87 \text{ Kbps}$$

Tale valore è molto più grande di quello relativo al canale ideale pari a 8 Kbps. Ciò è ovviamente assurdo poiché un canale rumoroso non può avere una capacità informativa maggiore di quella di un canale ideale. Applicando la (8) si ottiene:

$$\log_2 L = \frac{C}{2B} = \frac{39.87 \cdot 10^3}{2 \cdot 4 \cdot 10^3} \cong 5$$

Da cui si ricava:  $L = 32$ ; pertanto il canale in esame può trasmettere 39.87 Kbps a patto che si impieghi un sistema di trasmissione multilivello a 32 livelli che associ ad ogni simbolo 5 bit come accade nei modem a 28800bps e a 33600bps.

#### 4. Distorsioni in un canale di comunicazione

Nella trasmissione delle informazioni il segnale elettrico che si propaga dal trasmettitore al ricevitore si può pensare, in generale, costituito (sviluppo di Fourier) da una serie di segnali elementari sinusoidali che subiscono lungo il percorso, attenuazione, ritardo e deformazioni che potrebbero compromettere la ricostruzione del segnale elettrico al ricevitore e quindi il riconoscimento del messaggio che si intende

scambiare. I parametri fondamentali che definiscono la propagazione delle varie componenti armoniche lungo un canale di trasmissione sono la *costante di attenuazione*  $\alpha$ , misurata in dB/Km, e la *costante di fase*  $\beta$ , misurata in rad/Km o in °/Km. La costante di attenuazione indica l'attenuazione per unità di lunghezza che il segnale subisce nel percorrere il canale di comunicazione, mentre la costante di fase rappresenta lo sfasamento, per unità di lunghezza, della componente armonica trasmessa. Tali parametri sono caratteristici di tutti i portanti trasmissivi come le linee in rame (doppino telefonico e cavo coassiale) le fibre ottiche e le antenne.

In questo paragrafo si vuole approfondire il concetto relativo alla costante di fase per meglio comprendere la distorsione che essa introduce nella trasmissione di un segnale elettrico. Indicando con  $\lambda$  la lunghezza d'onda di una generica armonica dello spettro di frequenza del segnale da trasmettere, si ricava:

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \quad [\text{rad/Km}] \quad (11)$$

Si definisce **velocità di fase**  $v_f$  la velocità con cui una determinata armonica si propaga lungo il canale di trasmissione. Poiché nel periodo  $T$  il segnale percorre lo spazio  $\lambda$  si ha:

$$v_f = \frac{\lambda}{T} = \frac{2\pi/\beta}{2\pi/\omega} = \frac{\omega}{\beta} \quad (12)$$

In realtà il segnale che si trasmette è un segnale composto costituito, in virtù dello sviluppo in serie di Fourier, dalle armoniche confinate entro lo spettro di frequenza assegnato alla trasmissione.

Ciò che interessa è la velocità con cui si propaga l'energia associata al segnale dal trasmettitore al ricevitore. A tale velocità si dà il nome di **velocità di gruppo**. Per comprendere il significato di velocità di gruppo, consideriamo la trasmissione di due segnali sinusoidale a frequenze  $f_1$  e  $f_2$  prossime tra loro e comprese entro la banda di trasmissione. Esse, durante la propagazione, interferiscono tra loro dando origine al noto fenomeno dei *battimenti* con formazione di nodi negli istanti in cui le fasi dei segnali sono in opposizione e di ventri quando tali fasi sono identiche. Si dimostra che la velocità con cui si muovono i ventri di tensione è proprio la velocità di propagazione dell'energia. Poiché la frequenza dei battimenti è la differenza tra le frequenze  $f_1$  e  $f_2$  e la fase è pari alla differenza delle fasi, si ha che la velocità di gruppo, indicata  $v_g$  vale:

$$v_g = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\beta_1 - \beta_2} = \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta} \quad (13)$$

In termini differenziali e generalizzando alle infinite coppie di frequenze  $f_1$  e  $f_2$ , si ha:

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} \quad (14)$$

Dalla precedente relazione si evince che se  $\beta$  è una funzione lineare della pulsazione allora la velocità di fase e quella di gruppo coincidono.

Si definisce **tempo di propagazione di gruppo**  $t_g$  il tempo che impiega l'energia del segnale a percorrere il canale di comunicazione. Indicando con  $L$  la lunghezza del canale si ha :

$$t_g = \frac{L}{v_g} = L \cdot \frac{d\beta}{d\omega} \quad (15)$$

Lo sfasamento totale dovuto all'intero percorso del segnale vale:  $\varphi = \beta \cdot L$ , per cui la precedente relazione diventa:

$$t_g = \frac{d\varphi}{d\omega} \quad (16)$$

Se lo sfasamento  $\varphi$  è direttamente proporzionale alla pulsazione  $\omega$ , il tempo di propagazione risulta costante per tutte le frequenze di lavoro (condizione di non distorsione). In questo caso, inoltre, la velocità di fase coincide con quella di gruppo:

$$t_f = t_g = \frac{\varphi}{\omega}$$

La precedente relazione può essere ottenuta in modo più semplice manipolando l'espressione trigonometrica di un segnale sinusoidale.

Infatti, indicando con:  $v(t) = V_M \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi)$  si ha:

$$v(t) = V_M \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi) = V_M \cdot \text{sen}\left[\omega \left(t + \frac{\varphi}{\omega}\right)\right]$$

Il termine  $t_f = \frac{\varphi}{\omega}$  entro parentesi, ha le dimensioni di un tempo e rappresenta il tempo di propagazione del segnale.

Esaminato il significato di attenuazione e di tempo di propagazione si può passare all'analisi dei diversi tipi di distorsione.

Qualunque sia la causa della distorsione essa pone un limite sia alla distanza fra i dispositivi in comunicazione che alla velocità di trasmissione delle informazioni.

Le distorsioni presenti in un canale di comunicazione si classificano nel seguente modo:

1. **Distorsione di ampiezza.** Si ha quando l'ampiezza del segnale che si propaga nel canale di trasmissione subisce una attenuazione  $\alpha$  non costante alle diverse frequenze della banda di lavoro. L'attenuazione è, normalmente, una funzione crescente della frequenza e dipende da numerosi fattori tecnologici e ambientali. In fig.5 si mostra il tipico andamento dell'attenuazione in funzione della frequenza.

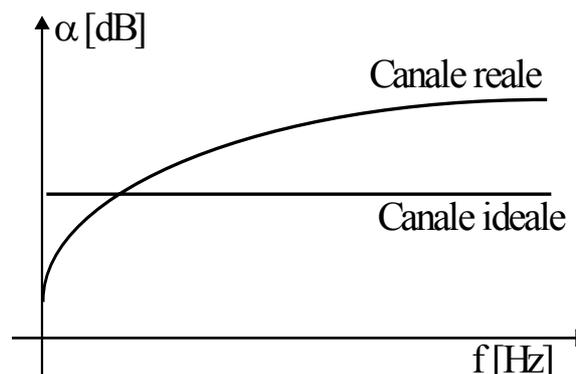


Fig.5 Andamento ideale e reale della caratteristica attenuazione-frequenza.

Le varie componenti armoniche giungono all'apparato ricevente con attenuazioni diverse e ciò si traduce in una modifica della forma d'onda ricevuta rispetto a quella trasmessa. Per ridurre la distorsione di ampiezza si impiegano *circuiti di equalizzazione* che presentano una risposta in frequenza complementare a quella del canale di comunicazione in modo da rendere l'attenuazione costante in tutta la gamma di frequenze di lavoro.

In sede internazionale l'ITU-T ha stabilito i valori massimi accettabili per l'attenuazione in collegamenti fonici o per trasmissione dati in funzione dei vari portanti. Tali limiti sono espressi in termini di **scarto di equivalente** che deve essere compreso entro delle **maschere equivalente-frequenza** fissate dall'ITU-T. Le misure dello scarto di equivalente si effettuano nel seguente modo:

Tramite un generatore a frequenza variabile ed un ricevitore (voltmetro elettronico opportunamente tarato) si leggono i valori dell'equivalente a diverse frequenze e si determinano gli scarti tra gli equivalenti alle diverse frequenze e l'equivalente valutato alla frequenza di riferimento (800 Hz per la fonia, 850 Hz o 1020 Hz per i sistemi PCM e quelli per trasmissione dati). Il collegamento è a norma se gli scarti di equivalente sono compresi entro le maschere relative al collegamento in esame. In fig. 6 si riportano alcune maschere equivalente-frequenza di uso pratico. La fig.6a) si riferisce a circuiti di qualità normale secondo la raccomandazione M.1040, mentre la fig.6b) è relativa a circuiti di qualità speciale secondo la raccomandazione M.1020.

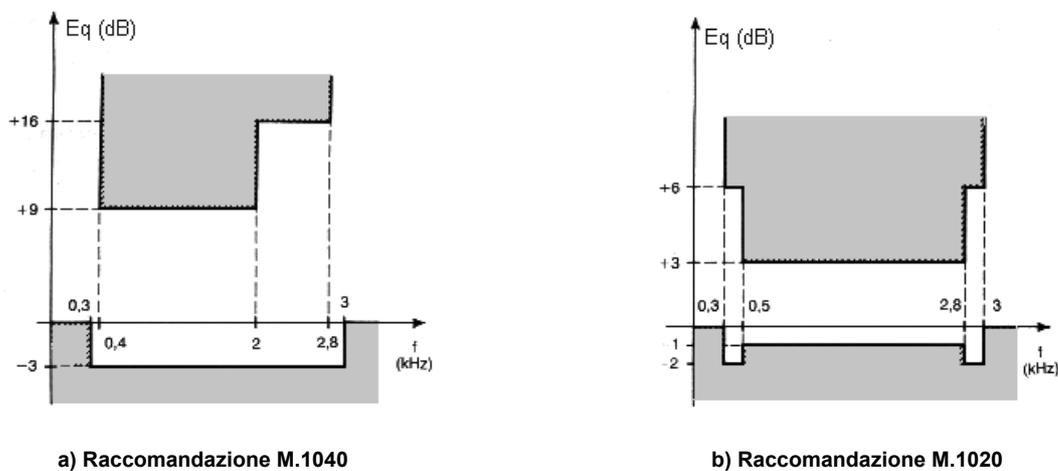


Fig.6 Maschere equivalente-frequenza.

Nel caso di trasmissione con codici di linea di tipo impulsivo, i segnali rettangolari che si propagano lungo il canale di trasmissione possono subire delle deformazioni tali da produrre una sovrapposizione di impulsi vicini che si traduce in un non riconoscimento dei bit trasmessi. Tale distorsione è nota come *interferenza intersimbolica*. In fig. 7 si mostra tale tipo di distorsione.

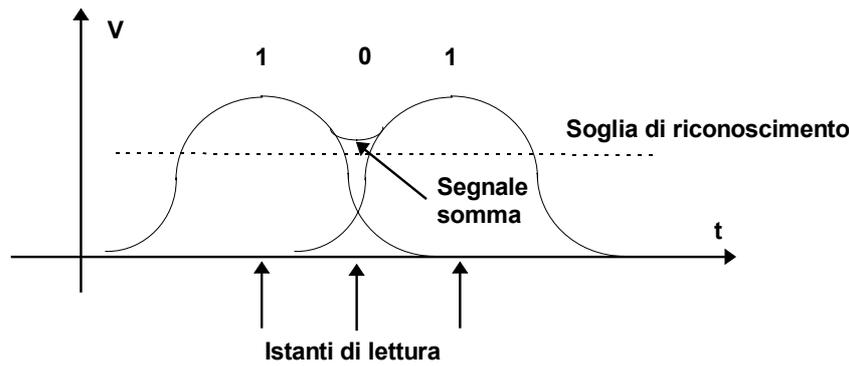


Fig.7 Distorsione intersimbolica. a) Segnale trasmesso, b) Segnale ricevuto.

Nell'istante di lettura del bit 0, la somma degli effetti dei bit 1 adiacenti potrebbe superare la soglia di riconoscimento per cui il secondo bit verrebbe letto come 1 piuttosto che 0.

Nei sistemi di trasmissione in tecnica PCM le misure di equivalente, tra utente e centrale o tra due centrali di transito, si effettuano mediante l'impiego di sofisticati e costosi strumenti denominati *PCM Analyzer* e *PCM Simulator*. Il primo è impiegato per analizzare la parte relativa alla conversione analogico-digitale, il secondo per verificare la conversione digitale-analogica.

2. **Distorsione di fase.** Tale distorsione, detta anche distorsione di seconda specie, è dovuta alle diverse velocità con cui si propagano le armoniche che costituiscono il segnale da trasmettere. Ad esempio, nei cavi telefonici per basse frequenze la velocità relativa alle frequenze più elevate è maggiore di quella delle frequenze più basse. Ciò si traduce in una modifica delle relazioni di fase tra le varie armoniche con conseguente nascita di distorsione di fase. Per evitare la distorsione di fase occorre che il tempo di propagazione di fase e di gruppo siano coincidenti. La distorsione di fase può essere compensata mediante l'impiego di un **equalizzatore di fase** in grado di rendere la costante di fase  $\beta$  direttamente proporzionale alla frequenza delle varie componenti armoniche e quindi  $v_g$  costante. Affinché un collegamento sia a norma, il ritardo di gruppo deve essere confinato entro particolari maschere del tipo di fig. 8 definite in sede internazionale dall'ITU-T.

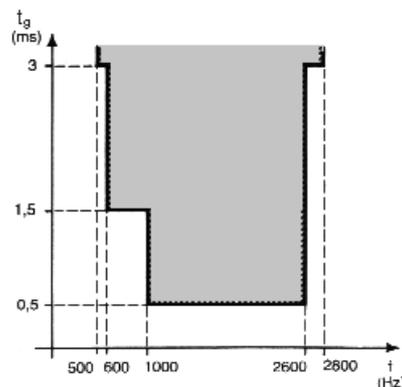


Fig. 8 Maschera ritardo di gruppo-frequenza

Inoltre, un collegamento è a norma se il tempo di propagazione di gruppo tra trasmettitore e ricevitore è compreso entro i seguenti limiti:

$$t_{m\_} - t_{\min} < 60 \text{ msec}$$

$$t_M - t_{\min} < 30\text{msec}$$

dove  $t_m$  e  $t_M$  rappresentano, rispettivamente, il tempo di propagazione della frequenza più bassa e più alta entro la banda di trasmissione, mentre  $t_{\min}$  è il minimo valore del tempo di propagazione. Gli strumenti per la misura del ritardo di gruppo devono rispettare la normativa O.81 dell'ITU-T.

3. **Jitter di fase.** Le diverse velocità di fase delle componenti armoniche dei segnali che transitano sul mezzo trasmissivo producono una modulazione di fase indesiderata che modifica in modo casuale gli istanti di attraversamento dell'asse delle ascisse delle diverse componenti sinusoidali. Il jitter di fase produce effetti indesiderati sulle trasmissioni dati, poiché la modifica degli istanti di transizione dei segnali può provocare il non perfetto riconoscimento del segnale digitale. Ciò si traduce in un aumento del **tasso d'errore** inteso come rapporto tra il numero di bit errati rispetto al numero totale di bit ricevuti:

$$T_\varepsilon = \frac{\text{n. bit errati}}{\text{n. totale di bit}}$$

La misura del tasso di errore viene eseguita mediante l'impiego di particolari strumenti noti come *data tester*. La misura si effettua inviando, nell'ora di punta (tra le 10 e le 12 antimeridiane) e per almeno 15 minuti particolari sequenze di bit di lunghezza  $2^{15}-1$  o  $2^{23}-1$  definite dall'ITU-T e note come *pattern di prova*; il ricevitore confronta la sequenza ricevuta con quella interna al data tester e rileva il numero di bit errati e li visualizza su apposito display. La misura del tasso di errore viene eseguita anche su interi blocchi di dati di opportuna lunghezza e, in tal caso si parla di *tasso di errore di blocco*. Un blocco è considerato errato se almeno un suo bit giunge errato al ricevitore. Nei sistemi telegrafici è consentito un tasso di errore non superiore a  $10^{-3}$ , cioè è ammesso, al più, 1 bit errato su 1000 trasmessi. Nelle trasmissioni dati il tasso di errore deve essere inferiore a  $10^{-7}$ . In un sistema di trasmissione PCM a 2.048 Mb/sec, un tasso di errore di  $10^{-7}$  significa ricevere, all'incirca, 1 bit errato ogni 5 secondi di trasmissione.

Il jitter di fase, relativo a segnali analogici, viene misurato mediante appositi strumenti rispondenti agli avvisi dell'ITU-T O.91 e O.95. La misura consiste nell'inviare un tono di prova a 1020Hz con livello di potenza di -10dBm. Il ricevitore, tramite circuiti ad aggancio di fase PLL, misura il jitter di fase che deve essere minore di  $15^\circ$ .

4. **Attenuazione di simmetria.** Tale attenuazione si manifesta su linee in rame nelle quali i due conduttori della linea presentano, rispetto al morsetto di terra, impedenze diverse. Ciò si traduce in un imperfetto bilanciamento dei fili nei confronti di tensioni esterne di rumore che si inducono in modo asimmetrico sul segnale utile che percorre la linea di trasmissione.
5. **Distorsione di non linearità.** Tale distorsione, denominata anche distorsione armonica, si manifesta in tutti gli apparati di comunicazione in cui sono inseriti quadripoli attivi (amplificatori) o passivi (attenuatori e filtri a componenti passivi) che presentano una funzione di trasferimento non lineare. In questi casi un segnale puramente sinusoidale è deformato e, per il teorema di Fourier, è scomponibile in una componente fondamentale, avente la stessa frequenza del segnale sinusoidale di ingresso, più una serie di armoniche a frequenza multipla della fondamentale.

Pertanto, se il segnale da trasmettere è complesso si ottengono, in uscita, oltre alle sue frequenze componenti, segnali spuri con frequenze date dalla combinazione lineare di quelle componenti (distorsione di intermodulazione). La distorsione armonica si può misurare mediante opportuni strumenti denominati *distorsimetri*. La distorsione totale di un collegamento è stabilito da norme emanate dall'ITU-T e, tipicamente, deve essere inferiore all'1%.

6. **Distorsione isocrona.** E' un tipo di distorsione caratteristica dei sistemi di trasmissione dati di tipo digitale e rappresenta lo scostamento temporale che i fronti dei segnali ricevuti presentano rispetto a quelli ideali, come mostrato in fig.9.

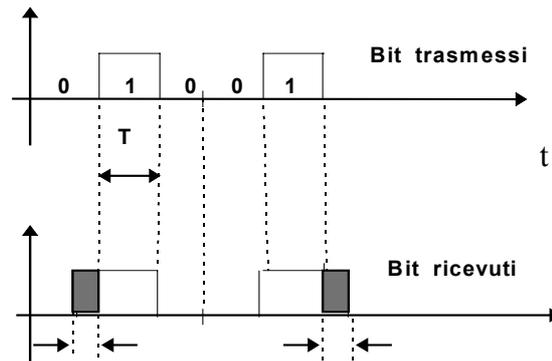


Fig.9 Distorsione isocrona.

Indicando con  $T$  la durata ideale del singolo impulso digitale, la distorsione isocrona è definita dalla seguente relazione:

$$D\% = \frac{\Delta t}{T} \cdot 100$$

La distorsione isocrona si considera positiva se si riferisce al fronte di discesa, negativa se a quello di salita. Tale distorsione deve essere, tipicamente, contenuta entro il  $\pm 20\%$ .

7. **Distorsione di dissimetria.** E' dovuta al fatto che durante la trasmissione i bit 0 e 1 subiscono delle modifiche nella durata  $T_b$ , per cui la durata del bit 0 è diversa da quella del bit 1. Si definisce distorsione di dissimetria o di bias la seguente quantità:

$$D_{dis} \% = \frac{T_1 - T_0}{T_{bit}}$$

Dove  $T_1$ ,  $T_0$  e  $T_{bit}$  sono, rispettivamente, la durata del bit 1, del bit 0 e quella nominale priva di distorsione. La misura di tale distorsione si effettua impiegando un Data-Tester e inviando una sequenza alternata di 0 e 1.

## 5. Rumore

Si definisce rumore un qualunque segnale spurio che si sovrappone al segnale utile e ne modifica la forma. I rumori si classificano in *parametrici* e in *additivi*. I rumori parametrici sono dovuti alle variazioni dei parametri elettrici dei dispositivi del sistema come da esempio, le dispersioni delle caratteristiche dei transistor o le variazioni delle tensioni di alimentazione in continua, ecc. Una resistenza elettrica  $R$ , anche se non alimentata da alcuna f.e.m., genera ai suoi capi una tensione di rumore  $V_n$  dovuta all'agitazione termica degli elettroni. Tale tensione vale.

$$V_n = \sqrt{4K \cdot T \cdot B \cdot R}$$

dove:

- K è la costante di Boltzmann pari a  $1.38 \cdot 10^{-23}$  [Joule/°K];
- T è la temperatura espressa in gradi Kelvin (273°K sono pari a 0°C);
- B è la banda di frequenze in Hz;
- R è il valore della resistenza in Ohm.

I rumori additivi sono quelli che si introducono nel sistema dall'ambiente esterno. Sono dovuti principalmente a variazioni delle caratteristiche ambientali (temperatura, umidità, ecc.) o a interferenze di apparati vicini (linee elettriche di alta tensione, fenomeni di diafonia, ecc.). In molti casi è difficile stabilire se un rumore è di origine interna (parametrico) o esterna (additivo) ma ai fini della trasmissione è interessante considerare il rumore come:

1. **Rumore bianco.** E' denominato anche rumore Gaussiano o rumore di fondo. Si presenta di ampiezza uniforme su tutta la banda di frequenza utilizzata e cresce con la lunghezza del collegamento. Il rumore bianco è dovuto principalmente ad effetti termici, ambientali e a fenomeni di diafonia. Il rumore bianco ha scarsa influenza nei sistemi di trasmissione dati in quanto la sua entità non è, normalmente, in grado di modificare i livelli di tensione di riconoscimento dei bit 0 e 1. Il suo effetto si riscontra nelle trasmissioni analogiche sotto forma di rumore di fondo che sovrappoendosi al segnale utile provoca un certo fastidio nell'ascolto del segnale. L'entità del rumore bianco deve essere valutata considerando che l'orecchio umano ha una sensibilità che dipende dalla frequenza del rumore stesso. Inoltre, si deve tenere conto anche della sensibilità di risposta del ricevitore telefonico. Sperimentalmente si è trovato che l'orecchio umano è molto sensibile ai rumori con frequenze intorno agli 800 Hz, mentre è poco sensibile alle altre componenti armoniche. Ciò, in pratica, si traduce nell'attribuire un *peso* alle diverse componenti armoniche del rumore. In fig.10 si mostra la **curva dei pesi psfometrici** normalizzata dall'ITU-T secondo la normativa P.53A.

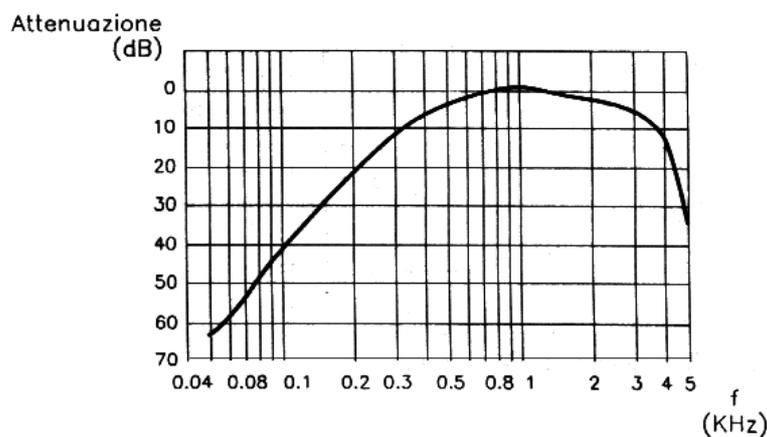
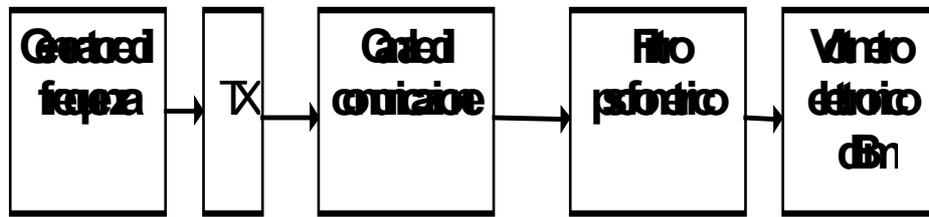
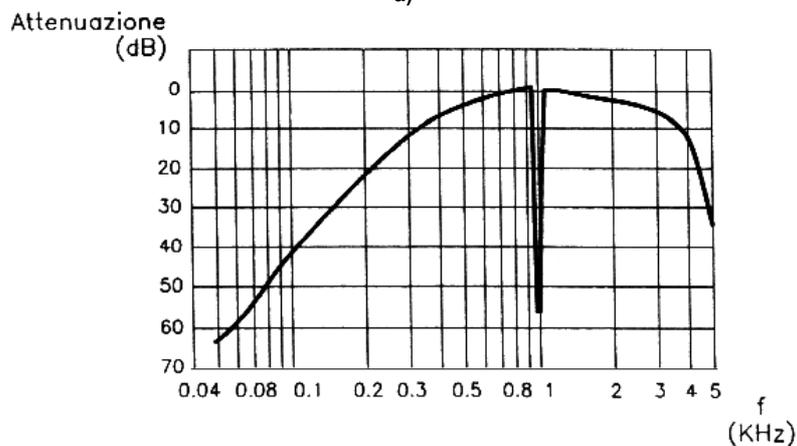


Fig. 10 Curva dei pesi psfometrici.

Dalla curva dei pesi psfometrici si ricava, ad esempio, che, a parità di ampiezza, un rumore a 50 Hz ha un effetto sull'udito attenuato di 63 dB rispetto a quello valutato a 800 Hz considerato come riferimento 0 dB. La misura del rumore di fondo viene effettuata inserendo un filtro psfometrico. In fig.11a) si riporta lo schema di principio per la misura del rumore di fondo, mentre in fig.11b) si mostra la curva di risposta normalizzata del filtro psfometrico.



a)



b)

Fig.11 In a) schema a blocchi per la misura del rumore di fondo; n b) curva di risposta del filtro psfometrico.

Il generatore in entrata produce un segnale di riferimento a frequenza fissa di 850 Hz a vari livelli misurati in dBmo compresi tra 0 e -50 dBm. L'indice dBmo indica che i livelli di potenza sono misurati assumendo come riferimento l'origine del circuito. Ad esempio, se il trasmettitore ha un livello di emissione di -15 dBm tale valore è assunto come riferimento pari a: 0 dBmo. In ricezione si inserisce un filtro psfometrico annulli-banda che ha il compito di eliminare il segnale a 850 Hz. In tal modo il voltmetro di uscita misura solo i livelli in dBmo delle componenti di rumore. La normativa dell'ITU-T stabilisce che per collegamenti di lunghezza superiore a 10000 Km il rumore psfometrico deve essere inferiore a -38 dBm.

2. **Rumore di quantizzazione nei sistemi PCM.** Nei sistemi di trasmissione in tecnica PCM si distinguono due tipi di rumore: lo **speech-off noise** (rumore di canale a riposo) e lo **speech-on noise** (rumore di quantizzazione). Il primo, di entità trascurabile, è il caratteristico rumore di fondo presente nell'apparato PCM in assenza di segnale. Il secondo si ha in presenza di segnale utile ed è dovuto al processo di quantizzazione insito nella conversione analogico-digitale del segnale fonico da trasmettere. La misura del rumore di quantizzazione si effettua utilizzando gli schemi di principio di fig.12.

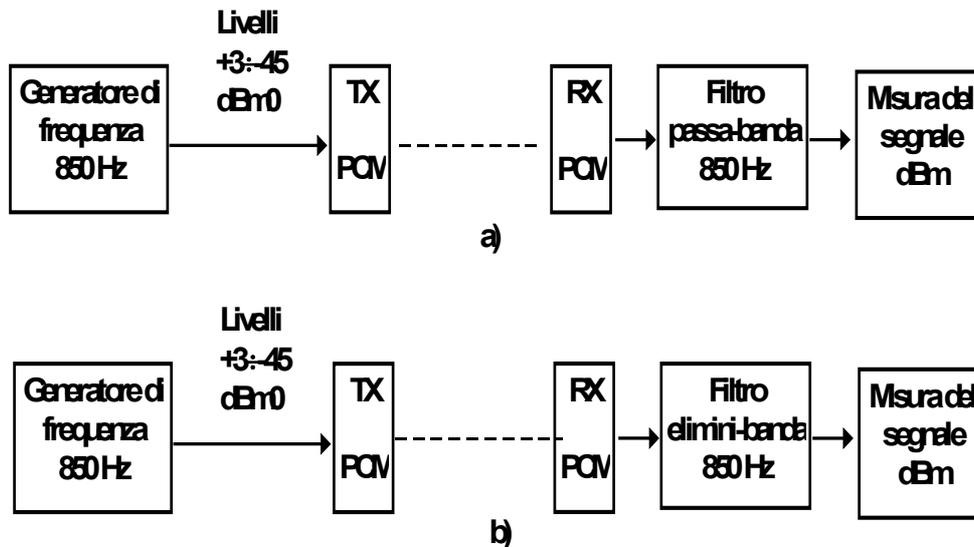


Fig.12. Misura del rapporto S/N in un sistema PCM.

La misura si effettua nel seguente modo:

Tramite un generatore (fig.12a) si trasmette un segnale sinusoidale a frequenza di 850 Hz (o 1020 Hz) a diversi livelli variabili tra +3 dBmo e -45 dBmo. Il ricevitore possiede un filtro selettivo passa-banda a 850 Hz che consente di misurare il livello S del solo segnale utile. Si effettuano più misure variando il livello del segnale di trasmissione tra +3 dBmo e -45 dBmo. Si ripetono le misure utilizzando lo schema di fig.12b). In questo secondo caso, il filtro annulla-banda elimina la componente di segnale a 850 Hz e lo strumento di uscita misura il rumore di quantizzazione N.

I valori del rapporto Segnale/Rumore S/N ai vari livelli devono essere compresi entro la maschera dell'ITU-T riportata in fig.13.

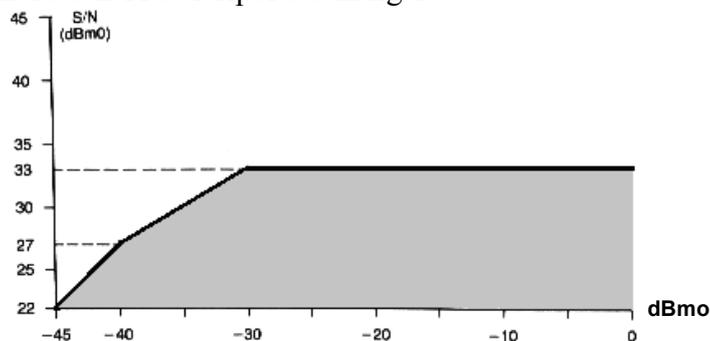


Fig.13 Maschera del rapporto S/N per sistemi PCM.

- Rumore impulsivo.** E' dovuto ad impulsi di elevati livelli energetici di breve durata che si inducono sul segnale utile. Le cause fondamentali che provocano rumore impulsivo sono i disturbi atmosferici, la commutazione di contatti elettrici di alta tensione, le scariche elettriche, ecc. Il rumore impulsivo può provocare perdita di bit nei ricevitori numerici. In fig. 14 si mostra, in maniera esagerata, l'effetto di un rumore impulsivo di elevata entità su un segnale numerico. La lettura del bit risulta errata poiché il rumore ha portato il livello di tensione dello stato logico alto al di sotto della soglia di riconoscimento di tale livello.

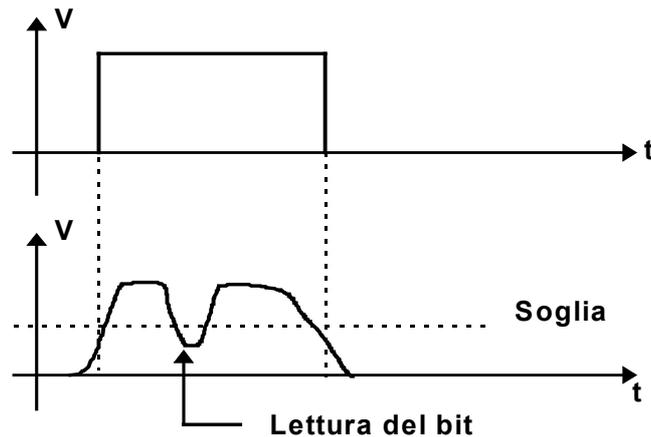


Fig. 14 Effetto del un rumore impulsivo su un segnale digitale.

La misura del rumore impulsivo viene effettuata mediante un dispositivo conforme alla normativa O.71 dell'ITU-T. Lo strumento conta gli impulsi che superano un prefissato livello di soglia.

La misura del rumore di fondo viene effettuata durante l'ora di maggior traffico telefonico per un periodo di tempo non inferiore a 15 minuti. In tali condizioni non si devono contare più di 18 impulsi spuri (1 impulso spurio ogni 50 sec.).

Il rumore impulsivo ha scarsa influenza nei canali analogici di fonia poiché l'orecchio umano non è in grado di percepire variazioni del livello sonoro di brevissima durata.

4. **Eco.** Il fenomeno dell'eco si manifesta con un fastidioso ritorno del segnale verso l'apparato trasmittente. L'eco è dovuto a inevitabili fenomeni di riflessione che vanno ricercati in:
- non perfetto adattamento di impedenza tra apparati ricetrasmittenti e canale di comunicazione;
  - discontinuità e imperfezioni del canale di comunicazione. Si pensi, ad esempio, ai giunti tra fibre ottiche;
  - alla presenza di sistemi a *forchetta*, mai perfettamente ideali, per la trasformazione di linee da 2 a 4 fili e viceversa.

Le norme dell'ITU-T stabiliscono che il segnale d'eco al ricevitore sia sempre di almeno 12 dB inferiore al livello del segnale diretto. In caso contrario è necessario dotare l'impianto di un dispositivo denominato *soppressore d'eco* conforme alla normativa G.164.

## 6. Diafonia

Una trasmissione di dati sia fonici che numerici è normalmente soggetta a disturbi e interferenze che dall'ambiente esterno si inducono sul mezzo trasmissivo. Se i disturbi indotti sono dovuti a cause diverse da quelle della trasmissione telefonica si parla di **interferenze** (disturbi elettrostatici ed elettromagnetici indotti da linee elettriche di alta tensione o da transistori di circuiti di accensione di motori elettrici, ecc.) , mentre se il disturbo è prodotto da altri circuiti telefonici vicini si parla di **diafonia**. I fenomeni di interferenza presenti sulle linee in cavo a doppino si compensano intrecciando i fili in modo da annullare gli effetti dei campi elettromagnetici indotti. Per i sistemi in cavo coassiale le interferenze sono automaticamente ridotte grazie all'azione schermante della calza del cavo. Le interferenze elettromagnetiche sono praticamente inesistenti nei collegamenti in fibra ottica. Per quanto concerne la diafonia essa si manifesta particolarmente nei collegamenti su mezzi di trasmissione in rame. L'effetto di diafonia è, negli apparati attualmente in uso, normalmente trascurabile ma possono

verificarsi dei casi in cui una conversazione su una coppia si induce su di un'altra coppia vicina per cui si ascolta una conversazione estranea al collegamento. Quest'ultimo effetto è denominato *diafonia in chiaro* e deve essere eliminato sia per motivi di intelligibilità di comunicazione che per garantire la segretezza della trasmissione. In fig. 15 si mostrano due circuiti telefonici vicini.

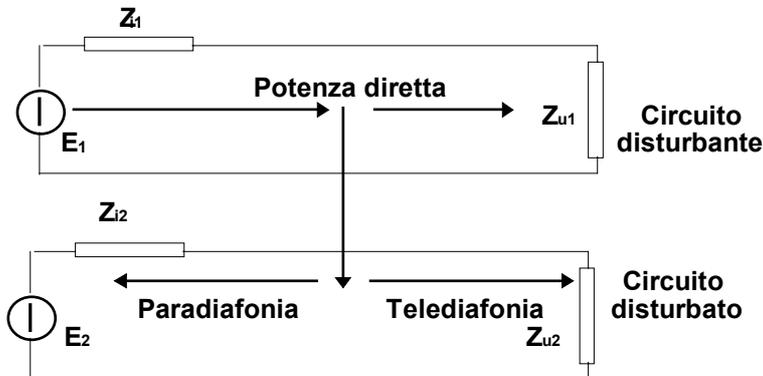


Fig.15 Rappresentazione schematica del fenomeno della paradiafonia e telediafonia.

La fig.15 mostra schematicamente come la potenza di trasmissione relativa al circuito disturbante si induce nel circuito inferiore ed interferisce con la eventuale comunicazione ivi presente. Inoltre si osserva che il fenomeno di diafonia ha due effetti distinti: la *paradiafonia* o diafonia vicina e la *telediafonia* o diafonia lontana. La prima è dovuta all'induzione di energia dal generatore  $E_1$  al generatore  $E_2$ , la seconda rappresenta l'induzione che dal generatore  $E_1$  si induce verso l'utente all'altro estremo del collegamento indicato con  $Z_{u2}$ . Ovviamente, anche il circuito inferiore indurrà, per diafonia, dei disturbi su quello superiore. Indicando con  $P$  la potenza di trasmissione del circuito disturbante e con  $P_{dp}$  e  $P_{dT}$  quelle indotte, rispettivamente, per paradiafonia e telediafonia, si definisce **attenuazione di diafonia**  $A_d$  la quantità:

$$A_d = 10 \cdot \text{Log} \frac{P}{P_{dp}} \quad \text{per la paradiafonia}$$

$$A_d = 10 \cdot \text{Log} \frac{P}{P_{dT}} \quad \text{per la telediafonia}$$

Si definisce *scarto di paradiafonia e telediafonia* la differenza tra il livello del segnale utile, e quello dei segnali indotti per diafonia espressi entrambi in dBm. Le norme dell'ITU-T stabiliscono che lo scarto di diafonia deve essere di almeno 65 dBm.

Per concludere si vuole solo accennare alla *autodiafonia* e alla *doppia diafonia*. La prima è presente nei collegamenti a 4 fili (2 di trasmissione e due di ricezione) nei quali si ha induzione mutua tra i due circuiti di trasmissione e ricezione; l'autodiafonia è, comunque, di scarsa entità e il relativo scarto minimo deve essere di 50 dBm. La doppia diafonia si ha in collegamenti che impiegano cavi con numerose coppie di conduttori per cui un circuito induce non solo su quello vicino ma anche, se pur con minore intensità, in uno più lontano.

## 7. Trasmissioni di segnali impulsivi

La trasmissione di segnali impulsivi lungo i canali di comunicazione (cavi in rame, fibre ottiche, ecc.) è fortemente influenzata dalle caratteristiche del canale stesso. Un segnale impulsivo a due livelli, come un segnale digitale, o a più livelli nel transitare lungo un canale fisico subisce deformazioni di ampiezza, frequenza e fase che se non contenute entro ben determinati limiti possono provocare la perdita completa dell'informazione che si intende trasferire.

Per compensare le distorsioni introdotte dal canale di comunicazione, il ricevitore deve contenere, prima del filtro di ricostruzione del segnale analogico, un opportuno *circuito equalizzatore*. Per individuare le caratteristiche generali dell'equalizzatore è opportuno tenere conto del comportamento di un canale ideale. Un tale canale presenta le seguenti caratteristiche:

- 1) attenuazione costante per qualunque frequenza compresa tra  $0 \div \infty$  ;
- 2) caratteristica di fase lineare per tutte le frequenze comprese tra  $0 \div \infty$  ;
- 3) assenza di rumore e di interferenze.

Un canale siffatto non produce alcuna modifica sulla forma d'onda del segnale che in esso transita.

La risposta in frequenza di un canale fisico è, in realtà, più complessa ma si può assimilare a quella di un filtro passa-basso reale con caratteristiche di frequenza e fase che dipendono dai parametri costruttivi del canale. In fig.16 si mostra una tipica risposta in frequenza di un filtro passa-basso.

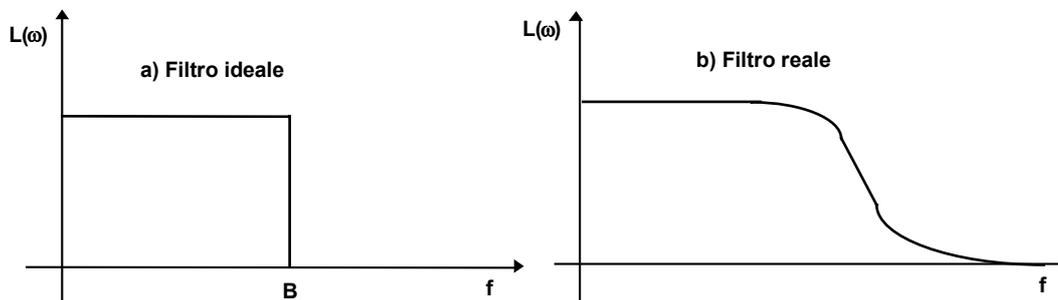


Fig.16 Risposta in frequenza di un filtro passa-basso.

In fig.17 si riporta lo schema a blocchi di un canale di comunicazione con l'inserimento dell'equalizzatore. Si è indicato con  $L(\omega)$  la risposta in frequenza del canale di trasmissione e con  $R(\omega)$  quella del circuito di equalizzazione.

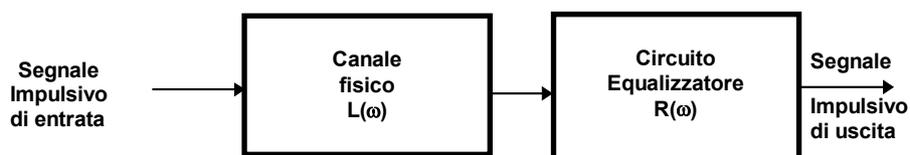


Fig.17 Canale di comunicazione.

La funzione di trasferimento  $R(\omega)$  del circuito di equalizzazione deve essere tale che, combinata con quella del canale fisico  $L(\omega)$ , generi la funzione di trasferimento del canale ideale o di un canale che si approssimi il più possibile a quello ideale.

Un canale che approssima in modo soddisfacente le caratteristiche di canale ideale è quello che si comporta come un filtro passa-basso ideale come mostrato nella curva a) di fig.16. Tale canale è ancora ideale poiché è impossibile realizzare un circuito equalizzatore in grado di ricostruire la curva di risposta di un filtro passa-basso ideale. Comunque, lo studio di un tale canale fornisce utili informazioni per la progettazione del sistema di equalizzazione.

Nel seguito faremo riferimento a questo tipo di canale che continueremo a chiamare ideale. Se un segnale impulsivo transita in un tale canale, avente frequenza di taglio  $B$ , il segnale viene deformato e assume la forma mostrata in fig18.

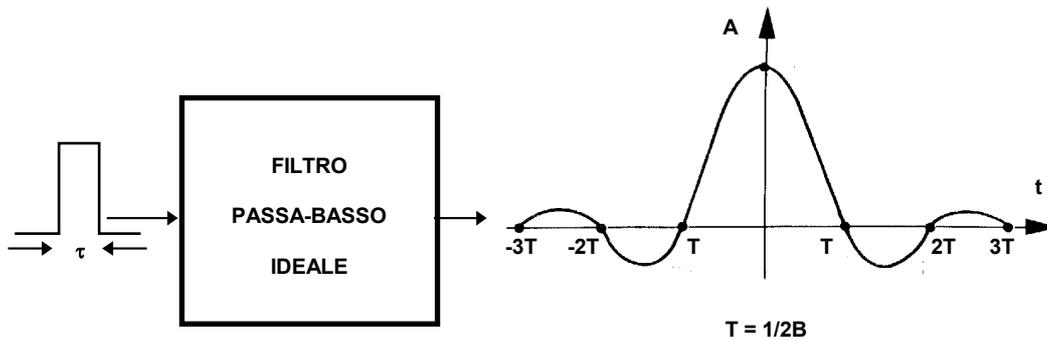


Fig.18 Segnale in uscita ad un canale a filtro passa-basso ideale con banda passante  $B$ .

L'impulso di uscita al canale ha l'andamento tipico della funzione  $\text{sen}x/x$ , come si può ricavare applicando il metodo della trasformata di Fourier. Le oscillazioni della funzione  $\text{sen}x/x$  attraversano l'asse delle ascisse in punti multipli di  $T = 1/2B$ , mentre l'ampiezza delle oscillazioni smorzate dipende dalla durata  $\tau$  degli impulsi di ingresso e dal coefficiente di attenuazione del canale.

Nel caso di canale reale (fig.16b) la risposta ad un impulso di breve durata è ancora del tipo  $\text{sen}x/x$  ma con dissimmetrie sia nella forma che nell'ampiezza delle oscillazioni. Una prima conseguenza di tale deformazione è che se viene trasmessa una sequenza di impulsi questi interferiscono in quanto le oscillazioni smorzate di un impulso si sommano a quelle dell'impulso successivo. Tale fenomeno, noto come *interferenza intersimbolica* riduce la velocità massima di trasmissione degli impulsi che non può essere maggiore di  $2 \cdot B$  bit/sec. Questa condizione si riferisce alla trasmissione di simboli binari. Nel caso di segnali a più livelli la massima velocità di trasmissione dipende dal numero di livelli, come descritto nel par.2.

Per poter progettare il filtro di equalizzazione è necessario determinare una funzione analitica di un ipotetico canale che comandato da un segnale impulsivo fornisca una risposta del tipo  $\text{sen}x/x$ , come in fig.18. Nel 1928 Nyquist ha determinato una classe di funzioni che soddisfano a tale proprietà.

Tra queste la più comune è quella denominata filtro a *coseno rialzato* di cui, in fig.19 si riporta la caratteristica.

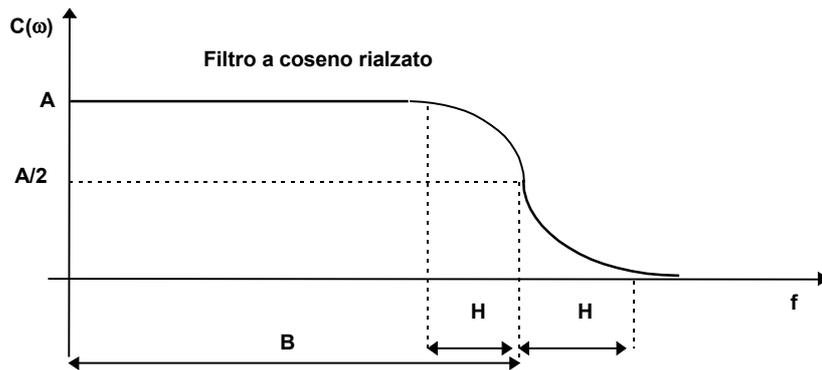


Fig.19 Curva di risposta di un canale a coseno rialzato.

L'espressione analitica di un filtro a coseno rialzato è :

$$C(\omega) = \begin{cases} 1 & ; \text{per } f < B - H \\ \frac{1}{2} \left[ 1 - \text{sen} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\omega - 2\pi B}{2\pi H} \right] & ; \text{per } B - H < f < B + H \\ 0 & ; \text{per } f > B + H \end{cases} \quad (17)$$

La risposta del filtro a coseno rialzato dipende dai valori di H e di B.

Il loro rapporto R, compreso tra 0 e 1, si definisce **coefficiente di roll-off**:

$$R = \frac{H}{B} \quad (18)$$

Si può pertanto affermare che se un impulso transita in un canale con funzione di trasferimento analoga a quella di un filtro a coseno rialzato esso subisce una deformazione (fig.18) del tutto analoga a quella introdotta da un canale ideale con oscillazioni tanto più attenuate quanto più il roll-off assume valori prossimi all'unità.

Nella pratica si utilizzano valori di roll-off prossimi a 0.5.

In particolare per  $R = 1$ , si ha  $B = H$  e la funzione  $C(\omega)$  diventa :

$$C(\omega) = \frac{1}{2} \left( 1 + \cos \frac{\pi \cdot f}{2 \cdot B} \right) \quad ; \text{per } f < 2B \quad (19)$$

Si osservi che la (19) è una funzione cosinusoidale ed è per tale motivo che il filtro è detto a coseno rialzato.

L'analisi svolta consente di avere gli strumenti matematici per la progettazione dei filtri di equalizzazione da inserire al ricevitore. Come si è detto l'equalizzatore deve compensare le deformazioni introdotte dal canale reale in modo da poterlo considerare ideale. Con riferimento alla fig.17 e supponendo nota la funzione di trasferimento  $L(\omega)$  del canale reale, quella dell'equalizzatore  $R(\omega)$  deve essere tale da riprodurre, complessivamente, quella del canale a coseno rialzato  $C(\omega)$  :

$$L(\omega) \cdot R(\omega) = C(\omega)$$

da cui si ricava:

$$R(\omega) = \frac{C(\omega)}{L(\omega)} \quad (20)$$

La precedente relazione è alla base della progettazione dei circuiti di equalizzazione inseriti nei ricevitori per sistemi numerici.

Nei sistemi numerici ad elevata velocità di cifra è molto complesso realizzare filtri di equalizzazione utilizzando soltanto componenti passivi come induttanze e capacità.

La tendenza attuale è quella di impiegare tecniche digitali che garantiscono un'ottima stabilità e precisione di funzionamento. In fig.20 si mostra lo schema di principio di un filtro equalizzatore denominato *filtro numerico trasversale*.

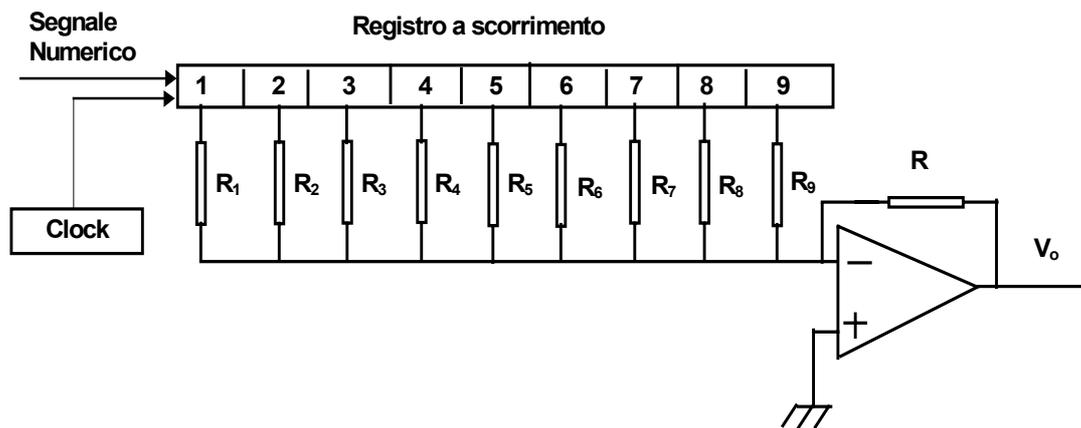


Fig.20 Filtro numerico trasversale.

Il filtro numerico trasversale è costituito da uno registro a scorrimento, ad esempio a 9 bit, le cui uscite sono opportunamente pesate e miscelate tra loro. Il segnale numerico scorre attraverso le celle del registro che fungono da celle di ritardo. Il simbolo da decodificare è quello relativo alla cella centrale. Il valore e la forma  $V_o$  associata a tale simbolo dipende dal contributo delle celle precedenti e seguenti.

Tarando opportunamente la rete resistiva è possibile eliminare l'effetto dell'interferenza intersimbolica dovuta alle oscillazioni smorzate (fig.18) presenti negli impulsi di linea. Il dimensionamento e la taratura della rete resistiva è realizzata sperimentalmente inviando in linea opportune sequenze numeriche campione.

Uno svantaggio nell'uso dei filtri numerici trasversali risiede nel fatto che l'interferenza intersimbolica è compensata grazie al legame tra i simboli adiacenti. Pertanto, un errore di decodifica di un bit si ripercuote sui bit adiacenti. Tali effetti si possono compensare impiegando opportuni codici di linea.

In alternativa al filtro a coseno rialzato si utilizza il filtro gaussiano la cui funzione di trasferimento è analoga a quella di fig.18 ma priva di oscillazioni smorzate (distribuzione di Gauss).

## 8. Codifica delle informazioni

Una sorgente di informazioni può essere costituita da numerosi e svariati tipi di messaggi quali un testo scritto, un suono, un'immagine, un insieme di dati binari, ecc. Per *codifica delle informazioni* si intende l'insieme delle procedure e delle trasformazioni a cui sottoporre i messaggi da trasmettere in modo da renderli idonei sia ai canali di trasmissione che agli apparati ricetrasmittenti.

Si definisce **codice** l'elenco dei simboli e delle regole che consentono la trasformazione del messaggio in forma binaria. Tutti noi abbiamo sempre sentito parlare di codici per la

trasmissione dei messaggi. Basti pensare ai segnali di fumo degli indiani d'America o ai tantam dei tamburi degli aborigeni nelle foreste o al linguaggio dei segni utilizzato dagli audiolesi o ai codici segreti impiegati dai militari, ecc.

Nei sistemi di telecomunicazioni si impiegano numerosi codici la cui struttura dipende dal campo di utilizzo (telegrafia, telefonia, trasmissione dati) e dal canale di comunicazione (cavo in rame, fibra ottica, antenna). La codifica delle informazioni deve essere strutturata in modo da consentire il controllo degli errori introdotti, inevitabilmente, nel canale di trasmissione.

La rivelazione e la eventuale correzione degli errori si ottiene trasmettendo, oltre all'informazione vera e propria, ulteriori bit, detti *bit ridondanti*. Il ricevitore decodifica i bit supplementari di ridondanza e rivela la presenza di eventuali bit errati. La correzione di un bit si ottiene, semplicemente, invertendone lo stato logico. In altri casi il ricevitore, decodificato l'errore, richiede al trasmettitore di rinviare il messaggio ricevuto errato. Nella pratica sono molto utilizzati i codici a rivelazione di errori. Quelli a correzione di errori sono impiegati solo nei casi in cui non è possibile la ritrasmissione del messaggio. Ciò accade, ad esempio, nei sistemi di comunicazione unidirezionali, oppure nei sistemi nei quali il ricevitore deve elaborare i dati in tempo reale (sistemi spaziali, militari, ecc.) e non può, pertanto, richiedere la ritrasmissione del messaggio.

Nel seguito saranno descritti alcuni codici impiegati nelle telecomunicazioni, altri saranno analizzati di volta in volta nel contesto dell'argomento che si sta sviluppando.

## 8.1. Codice Morse

E' uno dei classici codici telegrafici. I caratteri alfanumerici, lettere, numeri e alcuni segni di interpunzione sono individuati da un insieme di due segnali elettrici impulsivi di durata diversa. Il segnale breve è detto **punto** e ha una durata  $T_p$  di circa 1 secondo, quello lungo è detto **linea** e ha una durata equivalente a tre punti. Le **pause** tra gli impulsi di ciascun carattere sono pari a  $T_p$ , quelle tra due lettere sono pari a  $3T_p$ , mentre quelle tra due parole o due numeri sono pari a  $5T_p$ .

In tabella 3 si riporta la struttura del codice Morse.

Tabella 3. Codice Morse

Carattere	Codice	Carattere	Codice	Carattere	Codice	Carattere	Codice
A	•—	M	--	Z	--••	?	••---••
A'	•-•-	N	-•	1	•-----	'	•-----•
B	-•••	O	---	2	••-----	-	-••••-
C	-•-•	O'	---•	3	•••---	( )	-•-•-•-
CH	-----	P	•---•	4	••••-	" "	•-••••
D	-••	Q	--•-	5	•••••	=	-••••-
E	•	R	•-•	6	-•••••	—	••-•-•-
E'	••-••	S	•••	7	-•-•••	+	•-•-•
F	••-•	T	-	8	-----•	Errore	••••••••
G	--•	U	••-	9	-----•		
H	••••	U'	••--	0	-----		
I	••	V	•••-	,	-•-•-•-		
J	•-----	W	•-•-	.	•-•-•-		
K	-•-•	X	-••-	:	---•••		
L	•-••	Y	-•-•-	;	-•-•-•		

La trasmissione in codice Morse si realizza interrompendo ritmicamente mediante un tasto un segnale in modo da produrre opportune sequenze di punti e linee. La ricezione si ottiene mediante ascolto in cuffia. Attualmente il codice Morse non è più utilizzato

ma è un sistema interessante da un punto di vista dell'efficienza della codifica poiché ottimizza il numero di simboli associati ad ogni carattere alfanumerico. Infatti, i caratteri più frequenti sono codificati con pochi simboli, quelli meno frequenti con più simboli. Si osservi, ad esempio, che alla lettera E, la più frequente in un testo scritto, è associato un solo simbolo, mentre ai segni di interpunzione sono associati ben sei simboli.

## 8.2. Codice Baudot

Il codice Baudot, mostrato in tabella 4, è un codice telegrafico a 5 bit.

Tabella 4. Codice Baudot

Lettere	Cifre	Bit 1	Bit 2	Bit 3	Bit 4	Bit 5
A	–	1	1	0	0	0
B	?	1	0	0	1	1
C	:	0	1	1	1	0
D	CHI E'	1	0	0	1	0
E	3	1	0	0	0	0
F	°	1	0	1	1	0
G	%	0	1	0	1	1
H	;	0	0	1	0	1
I	8	0	1	1	0	0
J	Ring	1	1	0	1	0
K	(	1	1	1	1	0
L	)	0	1	0	0	1
M	.	0	0	1	1	1
N	,	0	0	1	1	0
O	9	0	0	0	1	1
P	0	0	1	1	0	1
Q	1	1	1	1	0	1
R	4	0	1	0	1	0
S	'	1	0	1	0	0
T	5	0	0	0	0	1
U	7	1	1	1	0	0
V	=	0	1	1	1	1
W	2	1	1	0	0	1
X	/	1	0	1	1	1
Y	6	1	0	1	0	1
Z	+	1	0	0	0	1
Ritorno Carrello		0	0	0	1	0
Interlinea		0	0	0	0	0
Scambio Lettere		1	1	1	1	1
Scambio Cifre		1	1	0	1	1
Spazio		0	0	1	0	0
Non utilizzata		0	0	0	0	0

Il codice Baudot è in grado di codificare le 26 lettere dell'alfabeto più un certo numero di cifre e caratteri speciali. Poiché con 5 bit si possono codificare solo  $2^5 = 32$  combinazioni è necessario segnalare se i caratteri sono lettere o cifre. Ciò si ottiene inviando, in via preliminare, il codice *scambio lettere*: 11111 o *scambio cifre*: 11011 per segnalare che i caratteri che seguono appartengono alla colonna lettere o cifre.

Una variante del codice Baudot è il codice telegrafico internazionale CCITT n° 2. Esso è analogo al Baudot con l'unica differenza che i 5 bit di codice sono preceduti da un bit di START (livello 0) e seguiti da uno di STOP (livello 1). Pertanto, tale codice è costituito da 7 bit.

### 8.3. Codice di parità

Il controllo della corretta trasmissione avviene aggiungendo un bit ad ogni carattere trasmesso in modo che il numero di bit posti ad 1 sia, complessivamente, pari (parità pari) o dispari (parità dispari). Il dispositivo ricevitore controlla la parità del dato ricevuto. Se essa corrisponde a quella stabilita prima dell'inizio della comunicazione, il ricevitore accetta come corretto il dato. Se un disturbo sulla linea commuta un solo bit, cambia la parità del dato trasmesso ed il controllore rivela, così, la presenza dell'errore ma non ne individua la posizione.

I codici che consentono l'individuazione della posizione del bit ricevuto con errore permettono anche la correzione: infatti la correzione avviene semplicemente completando il bit.

Si noti, infine, che la simultanea commutazione di due bit dovuta ai disturbi sulla linea, non altera la parità e il controllore non è in grado di rivelare l'errore. Nonostante ciò, il controllo di parità è molto adoperato perché la simultanea commutazione di due bit è un evento assai improbabile.

Nei sistemi in cui il bit di parità non è sufficiente si usa una combinazione tra il bit di parità aggiunto ad ogni singolo carattere (parità orizzontale) e un bit di parità che controlla la parità di tutti i bit che occupano la stessa posizione in ogni carattere del messaggio (parità verticale).

In fig.21 si mostra un insieme di 8 byte con parità pari in senso orizzontale e verticale.

				Bit di parità orizzontale
1	0001	0001	0	
2	0001	1100	1	
3	0010	1010	1	
4	0011	1011	1	
5	0000	1111	0	
6	0101	0101	0	
7	0111	0001	0	
8	0000	1010	0	
	0011	1101		bit di parità verticale

Fig. 21 - Determinazione dei bit di parità orizzontale e verticale

Questo metodo consente di individuare la posizione del bit errato ; infatti, supponendo un errore di trasmissione solo sul quarto bit del byte 6, il ricevitore rivelerà un errore sul sesto bit di parità orizzontale e successivamente un errore sul quarto bit verticale. L'intersezione riga-colonna individua il bit errato che si corregge complementandolo. Il metodo risulta efficace se si presenta un solo errore nell'intero gruppo di byte. Il codice di parità viene utilizzato nelle trasmissioni seriali asincrone dopo l'ultimo bit di ogni carattere trasmesso e prima del relativo bit di stop.

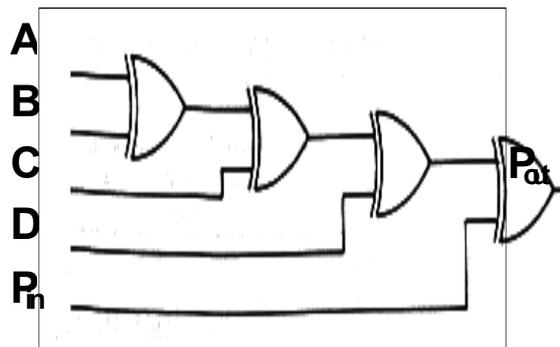
La generazione e il controllo della parità si realizza mediante semplici circuiti digitali basati sull'impiego di porte logiche XOR. L'operazione eseguita da una porta XOR è detta *somma modulo 2* e soddisfa la seguente tabella della verità. Con A e B si indicano le cifre binarie di entrata e con  $Y = A \oplus B$  il risultato dell'operazione.

Tabella 5  
Tabella della verità della porta logica XOR

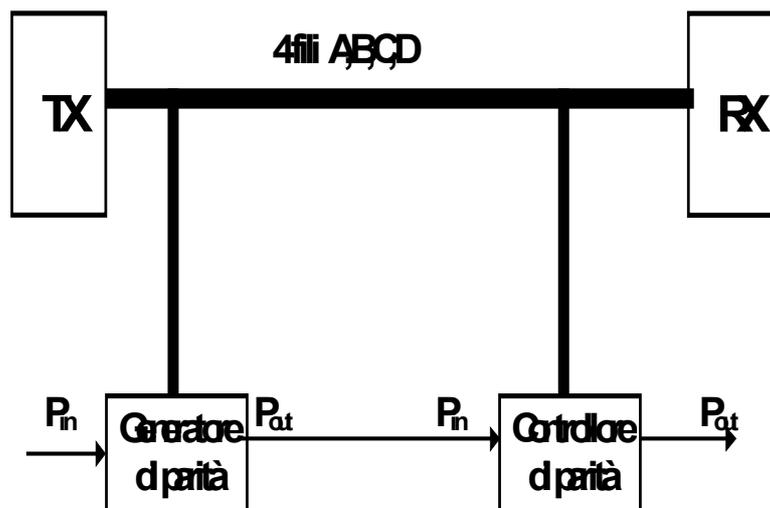
A	B	$Y = A \oplus B$
0	0	0

0	1	1
1	0	1
1	1	0

Nella fig.22a) si mostra un circuito logico a 4 bit utilizzato come generatore e controllore di parità, mentre nella fig.22b) si riporta lo schema a blocchi di un collegamento che fa uso del codice di parità per la rivelazione di un errore.



a)



b)

Fig. 22. In a) Generatore/controllore di parità a 4 bit; in b) schema a blocchi di un sistema per la rivelazione di un errore mediante codice di parità.

Usato come generatore di parità si deve porre il bit di controllo  $P_{in} = 0$ , per la parità pari, mentre  $P_{in} = 1$  per la parità dispari. Per utilizzare il circuito come controllore di parità è sufficiente collegare  $P_{in}$  con  $P_{out}$  del corrispondente generatore, come è stato fatto nella fig.22b). Una variazione dello stato logico della linea  $P_{out}$  del circuito controllore di parità segnala la presenza di un bit errato al ricevitore.

## 8.4. Codice ASCII

Il codice ASCII (American Standard Code for Information Interchange) è stato introdotto per la prima volta nel 1963 negli USA con lo scopo di aumentare il numero di

caratteri alfanumerici disponibili per la trasmissione delle informazioni. E' un codice a 8 bit di cui 7 bit impiegati per la codifica di  $2^7 = 128$  caratteri. L'ottavo bit è di parità per il controllo degli errori. Il bit di parità è al livello 0 oppure al livello 1 a seconda che il numero di 1 contenuti nella combinazione binaria del carattere considerato è pari o dispari. In tabella 6 si riporta la codifica dei caratteri nel codice ASCII, mentre in tabella 7 si riportano i significati dei caratteri di controllo.

Tabella 6. Codice ASCII

Posizione dei bit	7	0	0	0	0	1	1	1	1
	6	0	0	1	1	0	0	1	1
	5	0	1	0	1	0	1	0	1
1234	0000	NUL	DLE	SP	0	'	P	@	p
	0001	SOH	DC1	!	1	A	Q	a	q
	0010	STX	DC2	"	2	B	R	b	r
	0011	ETX	DC3	#	3	C	S	c	s
	0100	EOT	DC4	\$	4	D	T	d	t
	0101	ENO	NAK	%	5	E	U	e	u
	0110	ACK	SYN	&	6	F	V	f	v
	0111	BEL	ETB	'	7	G	W	g	w
	1000	BS	CAN	(	8	H	X	h	x
	1001	HT	EM	)	9	I	Y	i	y
	1010	LF	SS	*	:	J	z	j	z
	1011	VT	ESC	+	;	K	[	k	{
	1100	FF	FS	,	<	L	\	l	]
	1101	CH	GS	-	=	M	]	m	}
	1110	SO	RS	.	>	N	^	n	
	1111	SI	US	/	?	O	—	o	DEL

Tabella 6. Significato dei caratteri di controllo del codice ASCII

CODICE	SIGNIFICATO
NUL	Nulla
SOH	Start of Heading=Inizio testata
STX	Start of text = Inizio testo
ETX	End of text = Fine del testo
EOT	End of transmission = Fine trasmissione
ENO	Enquiry = Richiesta
ACK	Acknowledge = Conferma
BEL	Bell = Segnale acustico
BS	Backspace = Ritorna indietro di 1 carattere
HT	Horizontal tab = Tabulazione orizzontale
LF	Line feed = Avanzamento di una linea
VT	Vertical tab Tabulazione verticale
FF	Form feed = Avanzamento carta
CR	Carriage return = Ritorno carrello con accettaz. riga
SO	Shift out = Shift disinserito
SI	Shift in = Shift inserito
DLE	Data link escape = Uscita trasmissione
DC1	Direct control 1 = Controllo periferica 1
DC2	Direct control 2 = Controllo periferica 2
DC3	Direct control 3 = Controllo periferica 3
DC4	Direct control 4 = Controllo periferica 4
NAK	Negative acknowledge = Conferma negative
SYN	Synchronous idle = Attesa sincronizzata
ETB	End transmission block = Fine trasm. blocco
CAN	Cancel = Annulla
EM	End of medium = Fine supporto
SUB	Substitute = Sostituzione
ESC	Escape = Uscita dal codice
FS	Form separator = Separazione file
GS	Group separator = Separatore di gruppo
RS	Record separator = Separazione record
US	Unit separator = Separazione unità
SP	Space = Spazio
DEL	Delete = Cancellazione del carattere

## 8.5. Codici ciclici (CRC)

I *codici ciclici CRC* (Cycle Redundancy Checking), detti anche codici polinomiali, possono rivelare una maggior percentuale di errori con una minore ridondanza. Il metodo del CRC consiste nel trasmettere, alla fine di ciascun blocco di bit informativi, dei bit ridondanti costruiti mediante una opportuna procedura numerica. Il ricevitore effettua una operazione logica inversa e controlla la presenza di errori. Si descrive la procedura di generazione e controllo del codice CRC.

Sia  $N$  il numero di bit costituenti un blocco del messaggio da trasmettere. I singoli bit costituiscono i coefficienti di un polinomio  $P(x)$ , denominato *polinomio del messaggio*, di grado massimo  $N-1$  nella variabile fittizia  $x$ . Se, per semplicità, il blocco da trasmettere è costituito dai seguenti  $N = 8$  bit : 10101100 il polinomio è :

$$P(x) = 1 \cdot x^7 + 0 \cdot x^6 + 1 \cdot x^5 + 0 \cdot x^4 + 1 \cdot x^3 + 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 = x^7 + x^5 + x^3 + x^2$$

Per la generazione del codice CRC si impiegano opportuni *polinomi generatori*  $G(x)$  di grado  $K \leq N-1$  che terminano sempre con 1. Alcuni di essi sono ormai considerati standard e presentano  $K = 16$ ; ad esempio:

$$\begin{aligned} G(x) &= x^{16} + x^{12} + x^5 + 1 && \text{(CRC-CCITT)} \\ G(x) &= x^{16} + x^{11} + x^4 + 1 && \text{(CRC-CCITT inverso)} \\ G(x) &= x^{16} + x^{15} + x^2 + 1 && \text{(CRC-16)} \\ G(x) &= x^{16} + x^{14} + x + 1 && \text{(CRC-16 inverso)} \end{aligned}$$

Si moltiplica  $P(x)$  per  $x^k$  e si ottiene :

$$P'(x) = P(x) \cdot x^k \quad (\text{di grado inferiore a } N + K)$$

Le ultime  $k$  posizioni di  $P'(x)$  sono nulle.

Si divide il polinomio  $P'(x)$  così ottenuto per il polinomio generatore  $G(x)$  in aritmetica modulo 2 (laddove la somma e la sottrazione bit a bit sono equivalenti all'operazione di OR-esclusivo XOR) ; si ottiene un quoziente  $Q(x)$  ed un resto  $R(x)$  che verificano che l'espressione :

$$P'(x) = G(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

Il polinomio  $R(x)$  rappresenta il CRC.

Il messaggio trasmesso  $T(x)$  è costituito dalla somma :

$$T(x) = P'(x) + R(x)$$

Si osservi che le ultime  $K$  posizioni nulle di  $P'(x)$  sono occupate dai bit di  $R(x)$  di grado inferiore a  $K$ , mentre le prime  $N$  posizioni sono occupate dai bit del messaggio.

In definitiva,  $T(x)$  corrisponde ad una stringa di bit di cui i primi  $N$  rappresentano il messaggio  $P(x)$  da trasmettere e gli ultimi  $K$  sono i bit  $R(x)$  del CRC. In fig. 23 si mostra una rappresentazione schematica della stringa da trasmettere.

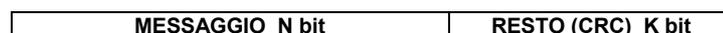


Fig.23 Rappresentazione dell'informazione da trasmettere comprensiva del CRC.

Il ricevitore, ottenuta la stringa di bit  $T(x)$ , corrispondente al polinomio  $P(x)$ , può ricalcolare il CRC e confrontarlo con quello ricevuto oppure può eseguire il rapporto tra  $T(x)$  ricevuto ed il polinomio generatore : in questo caso il resto è 0 se non vi sono stati errori in trasmissione.

Rimangono non rivelati gli errori che corrispondono a stringhe esattamente divisibili per il polinomio generatore ; evento, comunque, assai improbabile.

I codici polinomiali vengono usati nelle trasmissioni seriali sincrone come, ad esempio, nello scambio di dati tra memoria centrale e dischi magnetici.

### Esempio n.5

Determinare il CRC per il byte 1010 1100 utilizzando, come polinomio generatore, il CRC-CCITT.

#### Risoluzione

Si premette che questo è solo un esempio indicativo in quanto non è conveniente implementare la tecnica del CRC per la trasmissione di un solo byte. In pratica il metodo si impiega per messaggi di lunghezza elevata. Il polinomio  $P'(x) = P(x) \cdot x^{16}$  è di grado 23 ed è costituito da 24 bit (i coefficienti) che di seguito si riportano :

1010 1100 0000 0000 0000 0000

Il polinomio generatore  $G(x)$  da utilizzare è costituito dai seguenti 17 coefficienti :

1 0001 0000 0010 0001

La divisione tra  $P'(x)$  e  $G(x)$  si traduce, in pratica, in una serie di scorrimenti a destra di  $G(x)$  e successive operazioni di XOR tra bit omologhi. Si noti che non interessa valutare il quoziente ma esclusivamente il resto. Si riporta il polinomio  $P'(x)$  e sotto di esso, a partire dalla prima posizione a sinistra occupata da un 1, il polinomio generatore  $G(x)$ , con gli ultimi bit a destra posti forzatamente a 0. Si effettua la sottrazione bit a bit, cioè l'XOR, tra  $P'(x)$  e  $G(x)$  e si ottiene un risultato in terza riga. Si pone sulla quarta riga nuovamente  $G(x)$  con il suo bit più significativo in corrispondenza della colonna in cui appare il primo 1 a partire da sinistra in terza riga. Si effettua l' XOR tra terza e quarta riga e si genera una quinta riga sulla quale si itera il procedimento finché l'ultima riga ottenuta corrisponde ad un polinomio di grado inferiore a quello di  $G(x)$  (di grado 16). Tale polinomio rappresenta il resto.

$P'(x)$	1010	1100	0000	0000	0000	0000	1 <sup>a</sup> riga
$G(x)$	1000	1000	0001	0000	1000	0000	2 <sup>a</sup> riga
XOR (1° e 2°)	0010	0100	0001	0000	1000	0000	3 <sup>a</sup> riga
$G(x)$ scalato	10	0010	0000	0100	0010	0000	4 <sup>a</sup> riga
XOR (3° e 4°)	00	0110	0001	0100	1010	0000	5 <sup>a</sup> riga
$G(x)$ scalato		100	0100	0000	1000	0100	6 <sup>a</sup> riga
XOR (5° e 6°)		010	0101	0100	0010	0100	7 <sup>a</sup> riga
$G(x)$ scalato		10	0010	0000	0100	0010	8 <sup>a</sup> riga
XOR (7° e 8°)			0111	0100	0110	0110	CRC
Codice esadecimale CRC			7	4	6	6	generato

Il polinomio  $T(x)$  trasmesso ha i seguenti coefficienti :

1010 1100 0111 0100 0110 0110    Codice esadecimale : AC7466

### Esempio n.6

Effettuare il controllo del CRC dell'esempio precedente.

### Risoluzione

Si decide di impiegare la tecnica secondo cui si divide il polinomio ricevuto per lo stesso polinomio generatore  $G(x)$  utilizzato dal trasmettitore.

Se la trasmissione è avvenuta correttamente, il polinomio ricevuto  $R(x)$  coincide con  $T(x)$ . Dividendo  $T(x)$  per  $G(x)$  con lo stesso metodo dell'esempio precedente si deve ottenere resto nullo.

T (x)	1010	1100	0111	0100	0110	0110	1 <sup>a</sup> riga
G (x)	1000	1000	0001	0000	1000	0000	2 <sup>a</sup> riga
XOR (1° e 2°)	0010	0100	0110	0100	1110	0110	3 <sup>a</sup> riga
G (x) scalato	10	0010	0000	0100	0010	0000	4 <sup>a</sup> riga
XOR (3° e 4°)	00	0110	0110	0000	1100	0110	5 <sup>a</sup> riga
G (x) scalato		100	0100	0000	1000	0100	6 <sup>a</sup> riga
XOR (5° e 6°)		010	0010	0000	0100	0010	7 <sup>a</sup> riga
G (x) scalato		10	0010	0000	0100	0010	8 <sup>a</sup> riga
XOR (7° e 8°)		00	0000	0000	0000	0000	9 <sup>a</sup> riga

A questo punto il procedimento ha termine poiché l'ultima sottrazione, cioè l'ultima operazione XOR tra bit corrispondenti, ha fornito un risultato uguale a zero. Quest'ultimo rappresenta il resto della divisione mod. 2 e ciò informa il ricevitore che la trasmissione è avvenuta correttamente. Infatti il trasmettitore ha costruito, a partire dal messaggio  $P(x)$  da trasmettere, un polinomio  $T(x)$  esattamente divisibile per  $G(x)$  per cui la divisione tra  $T(x)$  e  $G(x)$  ha resto uguale a zero. Un errore di trasmissione altera il polinomio  $T(x)$  e il ricevitore acquisisce un polinomio diverso da  $T(x)$  con altissima probabilità di non divisibilità con  $G(x)$ . Il resto diverso da zero informa, appunto, l'avvenuto errore di trasmissione.

Viceversa, la probabilità che una serie di errore sui bit del polinomio  $T(x)$  determini la ricezione di un polinomio che risulti divisibile per  $G(x)$  dipende dalla scelta del polinomio generatore e si dimostra che quelli elencati precedentemente sono i più efficienti poiché consentono di rivelare una percentuale di errori superiore al 99.5%. Si osservi, per concludere, che il metodo del bit di parità non è in grado di rilevare errori che si manifestano in numero pari (se, per esempio, commutano due bit, il tipo di parità si conserva e il ricevitore non è in grado di individuare gli errori).

Il pregio dei codici CRC risiede nella semplicità di codifica e decodifica. I circuiti digitali impiegati per la generazione ed il controllo del CRC sono costituiti da porte logiche XOR e da registri a scorrimento. In generale, il circuito logico per la generazione del CRC si costruisce utilizzando un registro a scorrimento a  $K$  bit con porte logiche XOR in reazione inserite nei punti del circuito corrispondenti ai termini non nulli del polinomio generatore. In fig.24 si riporta lo schema logico per la generazione del CRC nel caso in cui il polinomio generatore sia  $G(x) = x^4 + x^3 + 1$ .

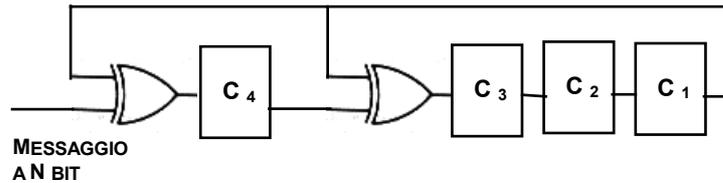


Fig. 24 Circuito per la generazione del CRC.

Il circuito è costituito da un registro a scorrimento a 4 bit, poiché  $G(x)$  è di 4° grado. Le porte logiche XOR sono 2 perché  $G(x)$  contiene solo 2 termini non nulli:  $x^4$  e  $x^3$ . I bit informativi sono inseriti uno alla volta all'ingresso seriale del registro; alla fine di tale operazione il contenuto delle 4 celle del registro corrisponde proprio al CRC che viene, pertanto, trasmesso in sequenza ai bit del messaggio.

## 8.6. Codice di Hamming

Il codice di parità consente la rivelazione dell'errore ma non la sua correzione. Aumentando la ridondanza nel messaggio (aggiunta di bit non necessari) è possibile conoscere anche la posizione del bit errato e quindi correggerlo. Il codice di Hamming fornisce questa possibilità.

Se un codice contiene  $N$  informazioni distinte, la rappresentazione in forma binaria di ciascuna di esse avviene utilizzando una parola di  $n$  bit in modo che si verifichi:  $2^n \geq N$ . Se, in particolare,  $N = 2^n$ , un errore in uno o più bit porta ad una configurazione binaria diversa che corrisponde, però, sempre ad dato appartenente allo stesso codice: in pratica non si riesce a comprendere se vi è stato un errore o meno.

Ad esempio, supponiamo di voler codificare le cifre decimali da 0 a 9 utilizzando 5 bit. Con 5 bit sono possibili  $2^5 = 32$  configurazioni differenti di cui solo 10 saranno utilizzate. Se vi è un errore il dato potrebbe assumere una delle altre 22 configurazioni e sarà, quindi, possibile rivelare un errore. Si noti che per la codifica delle 10 cifre decimali sarebbero necessari solo 4 bit. Il 5° bit è ridondante. Resta da definire la modalità di codifica. Un buon criterio è quello che associa ad ogni cifra decimale una configurazione binaria in cui sono presenti sempre due 1 e tre 0 (o viceversa) come nella seguente tabella 8.

Tabella 8

decimale	codifica
0	11000
1	10100
2	10010
3	10001
4	01100
5	01010
6	01001
7	00110
8	00101
9	00011

Si noti che se si verifica un errore il numero di 1 presenti nel codice si altera. Anche questo tipo di codifica individua la presenza ma non la posizione dell'errore. In generale, assegnato un codice, si definisce *distanza di Hamming D*, tra due configurazioni binarie, il numero di 0 e 1 che si devono cambiare per trasformare una combinazione in un'altra. Ad esempio, tra le combinazioni 11000 e 10001 la distanza di

Hamming è  $D = 2$ , poiché vi sono 2 variazioni di bit, precisamente nei bit di ordine  $2^0$  e  $2^3$ . La distanza di Hamming complessiva associata al codice è la minima tra tutte le possibili distanze relative alle diverse parole del codice.

Si può dimostrare che un codice con distanza di Hamming  $D$  è in grado di:

- rivelare  $D-1$  errori;
- correggere  $\frac{D-1}{2}$  errori.

Infatti, consideriamo, ad esempio, la trasmissione di un messaggio costituito da 2 soli simboli: A e B. La trasmissione si può realizzare inviando 2 bit: 0 per il simbolo A e 1 per il simbolo B. In questo semplice esempio la distanza di Hamming è  $D = 1$ . Un eventuale errore non potrà, in nessun caso, essere rivelato dal ricevitore. Se invece associamo al messaggio A il codice 00 e a B il codice 11, la distanza di Hamming diventa  $D = 2$  e si è in grado di rivelare un errore ma non di correggerlo. In questo caso, un errore in trasmissione trasforma il codice 00 di A o 11 di B in 01 oppure in 10 evidenziando la presenza di un errore poiché 01 e 10 sono combinazioni non appartenenti al nostro semplice codice. Per poter correggere un errore si deve aumentare ulteriormente la ridondanza. Associamo al messaggio A il codice 000 e al messaggio B il codice 111. In tal caso la distanza di Hamming è  $D = 3$  e si è in grado di correggere l'eventuale errore di trasmissione. Se ad esempio, si trasmette il messaggio A = 000 e un errore fa giungere al ricevitore il codice 100 è evidente la presenza e la posizione del bit errato che si potrà correggere complementando il suo stato logico. La sequenza errata 100 sarà corretta in 000. Si osservi che per correggere un errore nella trasmissione di 2 simboli è necessario impiegare 3 bit. Delle  $2^3 = 8$  combinazioni ben 6 sono ridondanti e servono per la individuazione della posizione del bit errato.

### 8.6.1. Codice di Hamming per la correzione di un errore.

Per correggere un errore nelle trasmissioni di messaggi in forma binaria si deve utilizzare un codice di Hamming con distanza  $D = 3$ . Il codice si costruisce partendo dalle seguenti considerazioni. Una parola binaria ad  $n$  bit per essere codificata secondo il codice di Hamming con distanza  $D = 3$  deve contenere  $m$  bit di controllo aggiuntivi inseriti in opportune posizioni del messaggio binario. Indicando con  $1,2,3,4,5,\dots$  le posizioni dei bit del messaggio da trasmettere, i bit di controllo devono essere inseriti nelle posizioni:  $1,2,4,8,\dots$ ; cioè nelle posizioni potenza di 2. Questi  $m$  bit individuano  $2^m$  combinazioni che ci informano sulla posizione del bit errato. Poiché un errore di trasmissione può verificarsi anche in uno degli  $m$  bit di controllo è evidente che  $m$  è il più piccolo valore che soddisfa la seguente disuguaglianza :

$$2^m - 1 \geq n + m$$

Ad esempio, con  $n = 4$  si ha :  $m = 3$  e la lunghezza della parola da trasmettere è di 7 bit; delle  $2^7 = 128$  combinazioni solo  $2^4 = 16$  sono quelle effettivamente necessarie per la trasmissione delle informazioni, le altre sono di ridondanza per la correzione di un eventuale bit errato.

Normalmente, come vedremo, i bit di controllo vengono generati in modo da determinare la parità di certi bit del dato.

Supponiamo che la parola da trasmettere sia a 4 bit:  $B_0 B_1 B_2 B_3$ . I bit ridondanti di controllo, indicati con:  $P_1 P_2 P_4$  si devono porre, rispettivamente nelle posizioni 1, 2 e 4. Pertanto, la parola complessiva da trasmettere sarà :

Posizione del bit	1	2	3	4	5	6	7
Parola da trasmettere	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	B <sub>0</sub>	P <sub>4</sub>	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>

Il ricevitore decodifica questa parola e genera altri tre bit K<sub>4</sub> K<sub>2</sub> K<sub>1</sub> che individuano la posizione dell'errore secondo la seguente tabella 9.

Tabella 9

K <sub>4</sub>	K <sub>2</sub>	K <sub>1</sub>	Significato
0	0	0	messaggio corretto
0	0	1	errore in pos. 1 (P <sub>1</sub> errato)
1	0	0	errore in pos. 2 (P <sub>2</sub> errato)
1	0	1	errore in pos. 3 (B <sub>0</sub> errato)
0	1	0	errore in pos. 4 (P <sub>4</sub> errato)
0	1	1	errore in pos. 5 (B <sub>1</sub> errato)
1	1	0	errore in pos. 6 (B <sub>2</sub> errato)
1	1	1	errore in pos. 7 (B <sub>3</sub> errato)

I bit di controllo P sono generati dal trasmettitore in modo che se la trasmissione fosse priva di errori si avrebbe al ricevitore : K<sub>4</sub> K<sub>2</sub> K<sub>1</sub> = 0 0 0. Supponendo la presenza di un solo errore, dalla tabella 9 si evince che:

- il bit K<sub>1</sub> = 1 se c'è un errore nella posizione 1 o 3 o 5 o 7;
- il bit K<sub>2</sub> = 1 se c'è un errore nella posizione 2 o 3 o 6 o 7;
- il bit K<sub>4</sub> = 1 se c'è un errore nella posizione 4 o 5 o 6 o 7.

Avendo supposto al più un solo errore, la presenza di questo in un bit esclude (OR-esclusivo) il manifestarsi di un errore su un altro bit ; pertanto, in una trasmissione priva di errori, deve verificarsi :

$$\begin{array}{ll}
 K_1 = P_1 \oplus B_0 \oplus B_1 \oplus B_3 = 0 & \text{da cui:} \quad P_1 = B_0 \oplus B_1 \oplus B_3 \\
 K_2 = P_2 \oplus B_0 \oplus B_2 \oplus B_3 = 0 & \text{da cui:} \quad P_2 = B_0 \oplus B_2 \oplus B_3 \\
 K_4 = P_4 \oplus B_1 \oplus B_2 \oplus B_3 = 0 & \text{da cui:} \quad P_4 = B_1 \oplus B_2 \oplus B_3
 \end{array}$$

Si ha che:

- P<sub>1</sub> è il bit di parità pari tra B<sub>0</sub>, B<sub>1</sub> e B<sub>3</sub>;
- P<sub>2</sub> è il bit di parità pari tra B<sub>0</sub>, B<sub>2</sub> e B<sub>3</sub>;
- P<sub>4</sub> è il bit di parità pari tra B<sub>1</sub>, B<sub>2</sub> e B<sub>3</sub>.

Le precedenti relazioni consentono di costruire, al trasmettitore, i bit di controllo P<sub>1</sub> P<sub>2</sub> P<sub>4</sub> e al ricevitore i bit K<sub>1</sub> K<sub>2</sub> K<sub>4</sub> per la decodifica della posizione del bit errato. In fig. 25 si riporta lo schema a blocchi di un sistema di trasmissione a 4 bit che fa uso del codice di Hamming.

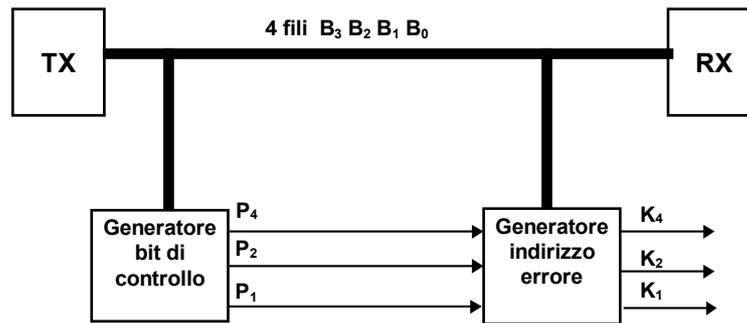


fig. 25. Schema a blocchi di un sistema di trasmissione con codice di Hamming.

Se il dato da trasmettere è un byte ( $n=8$ ) la disuguaglianza  $2^m - 1 \geq m + n$  è soddisfatta da  $m = 4$ . Il trasmettitore genera 4 bit di controllo  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_4$  e  $P_8$  da aggiungere al byte :

Posizione del bit	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Parola da trasmettere	$P_1$	$P_2$	$B_0$	$P_4$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$P_8$	$B_4$	$B_5$	$B_6$	$B_7$

Il ricevitore decodifica questa parola e genera altri quattro bit  $K_8$ ,  $K_4$ ,  $K_2$ ,  $K_1$  che individuano la posizione degli errori secondo la seguente tabella 10.

Tabella 10

$K_8$	$K_4$	$K_2$	$K_1$	Significato
0	0	0	0	messaggio corretto
0	0	0	1	errore in pos. 1 ( $P_1$ errato)
0	0	1	0	errore in pos. 2 ( $P_2$ errato)
0	0	1	1	errore in pos. 3 ( $B_0$ errato)
0	1	0	0	errore in pos. 4 ( $P_4$ errato)
0	1	0	1	errore in pos. 5 ( $B_1$ errato)
0	1	1	0	errore in pos. 6 ( $B_2$ errato)
0	1	1	1	errore in pos. 7 ( $B_3$ errato)
1	0	0	0	errore in pos. 8 ( $P_8$ errato)
1	0	0	1	errore in pos. 9 ( $B_4$ errato)
1	0	1	0	errore in pos. 10 ( $B_5$ errato)
1	0	1	1	errore in pos. 11 ( $B_6$ errato)
1	1	0	0	errore in pos. 12 ( $B_7$ errato)
1	1	0	1	errore in pos. 13 (non esiste)
1	1	1	0	errore in pos. 14 (non esiste)
1	1	1	1	errore in pos. 15 (non esiste)

Dall'analisi dei dati della tabella 8, si ricava che:

- $K_1 = 1$  se si verifica un errore in posizione 1, 3, 5, 7, 9, 11.
- $K_2 = 1$  se si verifica un errore in posizione 2, 3, 6, 7, 10, 11.
- $K_4 = 1$  se si verifica un errore in posizione 4, 5, 6, 7, 12.
- $K_8 = 1$  se si verifica un errore in posizione 8, 9, 10, 11, 12.

In una trasmissione priva di errori deve verificarsi :

- $K_1 = P_1 \oplus B_0 \oplus B_1 \oplus B_3 \oplus B_4 \oplus B_6 = 0$  da cui:  $P_1 = B_0 \oplus B_1 \oplus B_3 \oplus B_5 \oplus B_6$
- $K_2 = P_2 \oplus B_0 \oplus B_2 \oplus B_3 \oplus B_5 \oplus B_6 = 0$  da cui:  $P_2 = B_0 \oplus B_2 \oplus B_3 \oplus B_5 \oplus B_6$
- $K_4 = P_4 \oplus B_1 \oplus B_2 \oplus B_3 \oplus B_7 = 0$  da cui:  $P_4 = B_1 \oplus B_2 \oplus B_3 \oplus B_7$
- $K_8 = P_8 \oplus B_4 \oplus B_5 \oplus B_6 \oplus B_7 = 0$  da cui:  $P_8 = B_4 \oplus B_5 \oplus B_6 \oplus B_7$

Le precedenti relazioni consentono di costruire, utilizzando porte logiche XOR, i circuiti per la generazione dei bit di controllo e per la decodifica della posizione del bit errato.

### Esempio n.7

Convertire con il codice Hamming il seguente byte :

$$B_0B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7 = 01100110$$

*Risoluzione*

Applicando le formule precedenti si ottiene :

$$P_8P_4P_2P_1 = 0010$$

per cui il dato di uscita codificato secondo Hamming è :

Posizione del bit	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Parola da trasmettere	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	B <sub>0</sub>	P <sub>4</sub>	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	P <sub>8</sub>	B <sub>4</sub>	B <sub>5</sub>	B <sub>6</sub>	B <sub>7</sub>
Valore dei bit	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0

### Esempio n.8

Estrarre il byte della seguente stringa di 12 bit codificata in Hamming :

Posizione del bit	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Parola ricevuta	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	B <sub>0</sub>	P <sub>4</sub>	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	P <sub>8</sub>	B <sub>4</sub>	B <sub>5</sub>	B <sub>6</sub>	B <sub>7</sub>
Valore dei bit	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	1

*Risoluzione*

I bit di controllo in trasmissione valgono :

$$P_8P_4P_2P_1 = 0001$$

Dalle formule ricaviamo i bit di controllo in ricezione :

$$K_8K_4K_2K_1 = 1001$$

Il risultato ci informa che è stato commesso un errore sul bit di peso 9 (1001) che corrisponde a  $B_4$ . Quest'ultimo viene corretto semplicemente commutando il livello logico da 1 a 0 per cui il byte corretto vale :

$$B_0B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7 = 11000011$$

---