

**Capitolo VI del Testo**  
**Ettore Panella – Giuseppe Spalierno**  
**Corso di Elettronica 3**  
**Edizioni Cupido**

**SISTEMI A DATI CAMPIONATI**  
**TRASFORMATA Z – FILTRI DIGITALI**

### 1. Generalità

L'enorme sviluppo delle tecniche numeriche e il diffuso impiego del calcolatore nella elaborazione delle informazioni ha portato ad un parallelo sviluppo di metodi matematici in grado di fornire algoritmi idonei alla elaborazione dei dati su computer.

Ad esempio si pensi ad un sistema di acquisizione tramite PC. I segnali analogici da acquisire, provenienti da opportuni trasduttori, sono campionati ad intervalli di tempo prestabiliti, convertiti in forma digitale da un ADC ed acquisiti dal computer. Le informazioni numeriche acquisite dovranno essere elaborate in base alle specifiche del problema. Ad esempio, si potrà calcolare il valore massimo e quello minimo oppure valutare la media e la standard deviation oppure sviluppare delle procedure per operare del filtraggio digitale di tipo passa basso o passa alto, ecc. Queste tecniche sono abbastanza note a coloro che lavorano con software per l'elaborazione di segnali audio o video acquisiti con le normali schede in dotazione alla maggior parte dei PC.

La *trasformata z* costituisce il metodo matematico di base per trasformare il segnale campionato in una equazione numerica iterativa, nota come *equazione alle differenze finite*, facilmente implementabile su computer. Si vedrà, inoltre, che esiste una relazione tra trasformata di Laplace e trasformata  $z$  per cui si potrà operare una trasformazione tra segnali tempo-continui in segnali tempo-discreti. In questo modo una funzione tempo-continuo di un filtro passa-basso si potrà trasformare in una equazione alle *differenze finite* e quindi si potrà realizzare un filtro passa-basso digitale con le stesse caratteristiche di quello analogico. La differenza sta ovviamente nel fatto che quello analogico è realizzato da un circuito hardware mentre quello digitale è realizzato mediante un software. Nei sistemi analogici i segnali di ingresso e di uscita sono funzioni continue del tempo e le relazioni matematiche che legano l'ingresso all'uscita sono di tipo integro-differenziale. La trasformata di Laplace consente di trasformare tali relazioni in equazioni algebriche di tipo razionale fratto. Analogamente nel campo dei *sistemi a dati campionati* la trasformata  $z$  trasforma le equazioni alle differenze finite in equazioni algebriche.

## 2. Trasformata z

Si consideri una funzione tempo-continua  $f(t)$  per  $t > 0$ . Indichiamo con  $f^*(t)$  la funzione nel tempo attenuata dal campionamento della funzione  $f(t)$  da impulsi di Dirac di ampiezza unitaria e durata infinitesima e periodo  $T_c$ <sup>1</sup>.

La  $f^*(t)$  si può scrivere:

$$f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_c) \cdot \delta(t - nT_c) \quad \text{con } n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

La frequenza  $f_c = 1/T_c$  è detta **frequenza di campionamento** e deve rispettare il teorema di Shannon. Pertanto deve essere:  $f_c > 2f_{\max}$ . Dove con  $f_{\max}$  si è indicata la massima frequenza contenuta nel segnale da campionare  $f(t)$ .

In fig.1 si riporta una schematizzazione del processo del campionamento. L'involuppo degli impulsi del segnale campionato  $f^*(t)$  ricostruisce la forma d'onda del segnale  $f(t)$ .

Ricordando che la trasformata di Laplace di un impulso ritardato vale:

$L[\delta(t - nT_c)] = e^{-snT_c}$  si ricava che la trasformata di Laplace della (1) risulta:

$$L[f^*(t)] = F^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_c) \cdot e^{-snT_c} \quad (2)$$

Posto:  $z = e^{sT_c}$  (3)

Si ricava:

$$F^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_c) \cdot z^{-n} \quad (4)$$

La precedente relazione è detta **trasformata z** del segnale campionato  $f^*(t)$  e si indica con  $F(z)$ :

$$F(z) = F^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_c) \cdot z^{-n} \quad (5)$$

Sviluppando la precedente relazione si ricava:

$$F(z) = f(0) + f(T_c)z^{-1} + f(2T_c)z^{-2} + f(3T_c)z^{-3} + f(4T_c)z^{-4} +$$

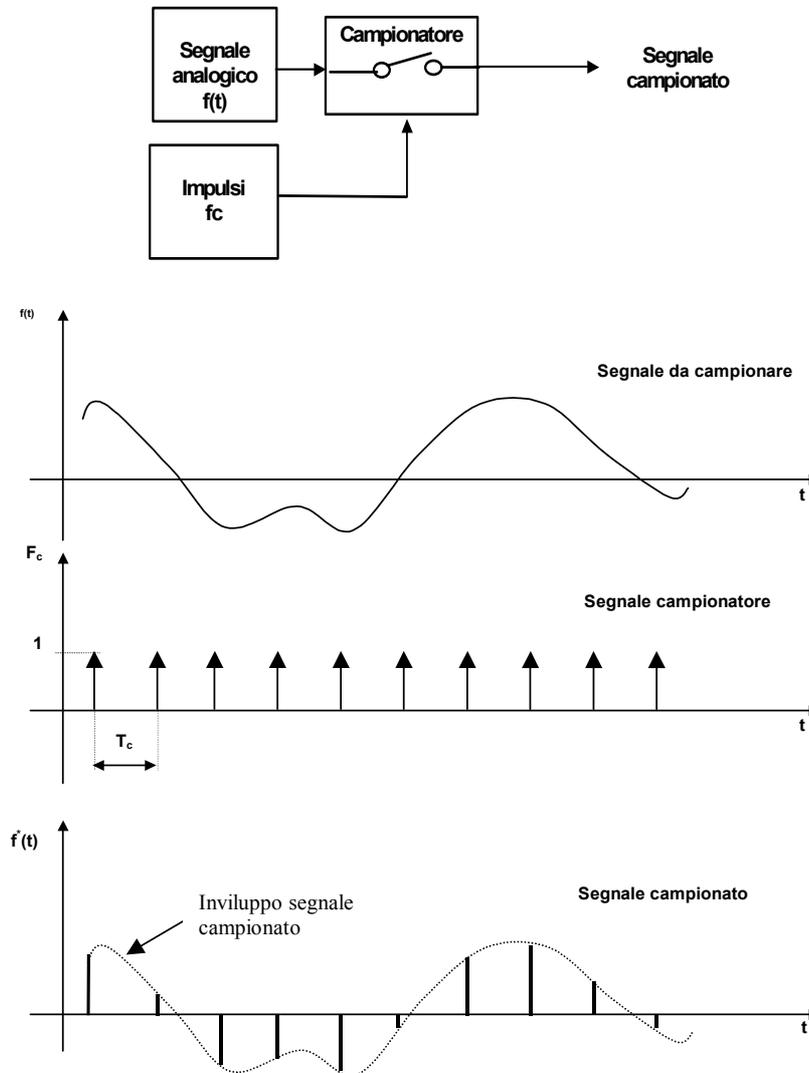
L'operatore inverso  $Z^{-1}[F(z)]$  è noto come **antitrasformata z**.

---

<sup>1</sup> Il segnale campionato è noto anche come segnale PAM (Pulse Amplitude Modulation). La codifica in binario del segnale PAM genera un segnale numerico ampiamente utilizzato nella trasmissione delle informazioni noto come segnale PCM (Pulse Code Modulation).

$$f(nT_c) = \frac{1}{2\pi j} \oint F(z) \cdot z^{nT_c-1} \cdot dz$$

Per il calcolo della antitrasformata  $z$  si possono applicare i metodi della scomposizione in fratti utilizzati nel dominio di Laplace.



**Fig.1** Rappresentazione del processo del campionamento di un segnale analogico  $f(t)$ .

**Esempio n. 1**

Determinare la trasformata  $z$  della seguente funzione campionata costituita da sei campioni come di seguito riportato:

$$f^*(t) = (1; 2; -5; -6; 0; 3) \quad \text{per } n = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

*Risoluzione*

Applicando direttamente la (5) si ottiene:

$$F(z) = 1 + 2z^{-1} - 5z^{-2} - 6z^{-3} + 0z^{-4} + 3z^{-5} = 1 + 2z^{-1} - 5z^{-2} - 6z^{-3} + 3z^{-5}$$

Si osservi che il termine generico  $az^{-n}$  indica che il campione di ampiezza  $a$  è ritardato di un tempo pari a  $nT_c$ .

**Esempio n. 2**

Determinare l'antitrasformata della funzione:

$$F(z) = 1 + 4z^{-1} - 6z^{-3}$$

*Risoluzione*

Antitrasformando si ricavano i valori dei dati campionati:

$$Z^{-1}[F(z)] = f^*(t) = (1, 4, 0, -6) \quad \text{per } n = 0, 1, 2, 3$$

Il segnale campionato è costituito da 4 campioni separati l'uno dall'altro da un tempo pari a  $T_c$ .

**2.1. Trasformate fondamentali****a) Trasformata  $z$  del segnale a gradino unitario  $f(nT_c) = 1$** 

Il segnale a gradino unitario  $u(t)$  ha ampiezza costante pari a 1, pertanto, se campionato con periodo  $T_c$  si può esprimere come un insieme di campioni unitari:  $f(nT_c) = 1$  per  $n \geq 0$ .

Applicando la (5) si ottiene:

$$Z[f(nT_c)] = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + \dots$$

Il precedente sviluppo costituisce una serie geometrica di ragione  $1/z$  convergente per  $|1/z| < 1$  ovvero  $|z| > 1$ . In tale ipotesi la serie converge al valore:

$$Z[f(nT_c)] = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1}$$

La precedente relazione è caratterizzata da uno zero nell'origine e da un polo reale  $p = 1$ .

b) *Trasformata z del segnale  $f(nT_c) = a^n$*

Applicando la (5) si ottiene:

$$Z[a^n] = 1 + a/z + (a/z)^2 + (a/z)^3 + (a/z)^4 + \dots$$

La precedente relazione individua una serie convergente per  $|a/z| < 1$ ; in tal caso si ha:

$$Z[a^n] = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} = \frac{z}{z-a}$$

c) *Trasformata z del segnale  $f(nT_c) = e^{-naT}$*

Procedendo come prima si ottiene:

$$Z[e^{-naT}] = 1 + e^{-aT} z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2} + e^{-3aT} z^{-3} + e^{-4aT} z^{-4} + \dots$$

In questo caso la serie è convergente per  $|\frac{e^{-aT}}{z}| < 1$ . In tale ipotesi si ha:

$$Z[e^{-naT}] = \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

Procedendo in questo modo è possibile ricavare la trasformata z per i più comuni segnali.

Nella seguente tabella si riportano le trasformate di alcune funzioni di interesse elettronico.

***Trasformata z di alcune funzioni elementari***

<b>f(n)</b>	<b>F(z)</b>	<b>Funzione</b>
$\delta(n)$	1	Impulso unitario Delta di Dirac
1	$\frac{z}{z-1}$	Gradino unitario
$(-a)^n$	$\frac{1}{z+a}$	Impulsi alternati
n	$\frac{z}{(z-1)^2}$	Rampa unitaria
$(n)^2$	$\frac{z^2+z}{(z-1)^3}$	Parabola unitaria
$a^{nT}$	$\frac{z}{z-a^T}$	Esponenziale decrescente
$n(-a)^n$	$\frac{(-a)z}{(z+a)^2}$	Impulsi alternati
$(-1)^n + (-1)^n \cdot n$	$\frac{z^2}{(z+1)^2}$	Impulsi alternati
$\sin(n\omega T)$	$\frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$	Funzione seno
$\cos(n\omega T)$	$\frac{z^2 - z \cos \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$	Funzione coseno
$e^{-anT} \sin(n\omega T)$	$\frac{ze^{-aT} \sin \omega T}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}}$	Funzione seno decrescente
$e^{-anT} \cos(n\omega T)$	$\frac{z^2 - ze^{-aT} \cos \omega T}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}}$	Funzione coseno decrescente

**2.2 Teoremi fondamentali sulla trasformata z****a) Teorema della linearità**

La trasformata di una combinazione lineare di due o più funzioni è uguale alla combinazione lineare delle trasformate delle singole funzioni.

$$Z[Af_1(n) + Bf_2(n)] = AF_1(z) + BF_2(z)$$

**b) Teorema del ritardo**

Se una funzione f(n) ha per trasformata F(z) ed essa è ritardata di K secondi allora la trasformata della funzione campionata ritardata f(n - K) vale:

$$Z[f(n - K)] = z^{-K} \cdot F(z)$$

In fig.2 si mostra lo schema a blocchi di un singolo elemento di ritardo.



**Fig. 2** Schema a blocchi di un elemento di ritardo nel dominio della trasformata z.

### c) Teorema del valore iniziale e del valore finale

Indicando con  $f(n)$  la sequenza dei dati campionati e con  $F(z)$  la relativa trasformata si dimostra che:

*Teorema del valore iniziale:*

$$f(0) = \lim_{n \rightarrow 0} f(n) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$$

*Teorema del valore finale:*

$$f(\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \lim_{z \rightarrow 1} \left( \frac{z-1}{z} \cdot F(z) \right)$$

### 3. Conversione continuo – discreto

La conversione dal dominio di Laplace  $s$  (continuo) a quello della trasformata  $z$  (discreto) e viceversa si ottiene sfruttando la relazione (3):

$$z = e^{sT_c} \quad \text{e l'inversa:} \quad s = \frac{1}{T_c} \ln z \quad (6)$$

Le relazioni precedenti risultano alquanto complesse e, nella pratica, si preferisce usare delle relazioni approssimate. Le più utilizzate sono:

- 1) Backward Difference;
- 2) ZOH;
- 3) Bilineare;
- 4) FOH;
- 5) Prewarp;
- 6) Matched.

In generale non è possibile stabilire dei criteri che facciano preferire un metodo di trasformazione ad un altro. La scelta dipende, ovviamente, dal sistema in studio, dal grado di approssimazione che s'intende ottenere, ecc. Nel seguito si farà riferimento, in particolare, ai metodi di approssimazione bilineare e ZOH che sono quelli maggiormente impiegati nello studio di sistemi di non elevata complessità

### 1) Backward Difference

Il metodo delle **differenze all'indietro** si basa sul **metodo di Eulero** per l'approssimazione della derivata di una funzione. Infatti, la derivata di una funzione in un punto si può esprimere in termini di rapporto incrementale:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{y(t) - y(t - T_c)}{T_c}$$

Passando alla trasformata di Laplace si ricava:

$$sY(s) = \frac{Y(s) - Y(s) \cdot e^{-sT_c}}{T_c}$$

Semplificando si ottiene:

$$s = \frac{1 - e^{-sT_c}}{T_c} = \frac{1 - z^{-1}}{T_c} \quad (7)$$

Assegnata una funzione  $G(s)$  l'equivalente nel dominio  $z$  si ottiene sostituendo ad  $s$  la precedente espressione. Si può dimostrare che questo metodo di approssimazione presenta errori trascurabili solo per frequenze di lavoro piccole rispetto alla frequenza di campionamento.

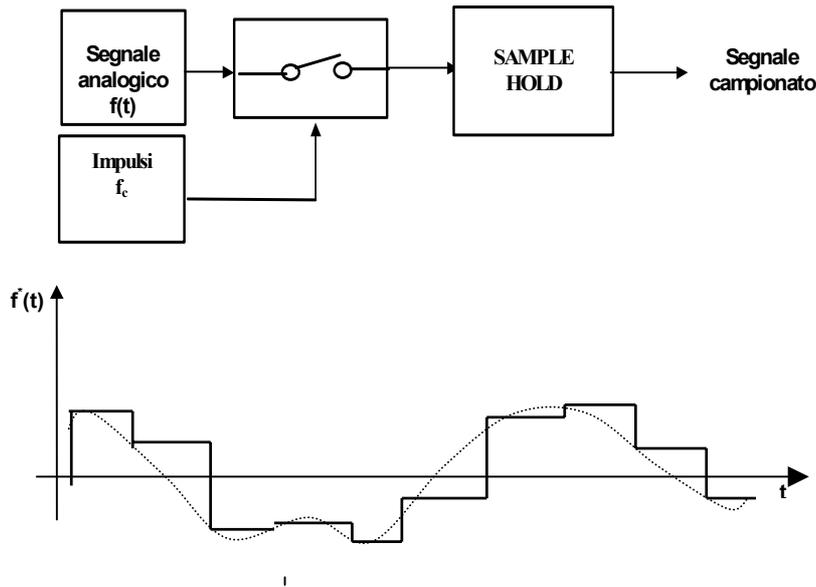
Esiste anche un metodo per le **differenze in avanti** (forward difference) che utilizza come definizione di rapporto incrementale:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{y(t + T_c) - y(t)}{T_c}$$

Procedendo come sopra si può ricavare la relazione di trasformazione. Si dimostra che tale approssimazione presenta diversi inconvenienti per cui è poco usata.

### 2) Trasformazione ZOH

La trasformazione ZOH ( Zero Order Hold) impiega il metodo Sample/Hold (organo di tenuta di ordine zero) che "mantiene" il valore campionato per tutto il periodo di campionamento. In fig. 3 si mostra lo schema a blocchi e il diagramma di tempificazione che evidenzia gli intervalli di "mantenimento" del segnale campionato.



**Fig. 3 Schema a blocchi del sistema ZOH.**

Il metodo ZOH consente una sorta di “continuizzazione” del segnale campionato  $f^*(t)$  che risulta costituito da una gradinata che segue l’andamento del segnale  $f(t)$ . In questo caso il segnale campionatore si può ritenere costituito da impulsi di ampiezza unitaria e durata pari al periodo di campionamento  $T_c$ . La trasformata di Laplace di un impulso è dato dalla differenza della trasformata di un gradino unitario con quella di un gradino ritardato di  $T_c$ .

Per cui:

$$L[u(t) - u(t - T_c)] = \frac{1 - e^{-sT_c}}{s}$$

Pertanto la funzione di trasferimento di un modulo Sample-Hold vale :

$$G_{ZOH}(s) = \frac{1 - e^{-sT_c}}{s} \quad (8)$$

La risposta armonica del modulo S/H si ricava sostituendo a  $s = j\omega$ . Applicando le formule di Eulero dopo alcuni passaggi si ricava:

$$G_{ZOH}(j\omega) = T_c \frac{\sin(\omega T_c / 2)}{\omega T_c / 2} \cdot e^{-j\omega T_c / 2} \quad (9)$$

Da cui è possibile ricavare i relativi diagrammi di Bode.

### 3) Trasformazione FOH

In questa trasformazione si assume come segnale campionario invece che un segnale costante, come nella ZOH, un segnale lineare a tratti (rampa) FOH (First Order Hold). Si dimostra che la funzione di trasferimento di un FOH vale:

$$G_{\text{FOH}}(s) = \frac{1 + sT_c}{T_c} \cdot \left( \frac{1 - e^{-sT_c}}{s} \right)^2 \quad (10)$$

### 4) Trasformazione bilineare o Tustin

Il metodo si basa sull'approssimazione numerica trapezoidale dell'integrale. Consideriamo in prima istanza il calcolo numerico approssimato dell'integrale definito inteso come somma di aree di rettangoli di altezza pari al valore dei dati campionati e base uguale al periodo di campionamento  $T_c$ . Indichiamo con  $x(t)$  una generica funzione del tempo e con  $Y(t)$  la corrispondente funzione integrale. Il valore numerico dell'integrale definito nel generico intervallo di campionamento di durata  $T_c$  vale:

$$Y[(n+1) \cdot T_c] - Y[nT_c] = \int_{nT_c}^{(n+1)T_c} x(t) \cdot dt$$

Tale integrale si può approssimare all'area di un rettangolo, per cui:

$$Y[(n+1) \cdot T_c] - Y[nT_c] = x(nT_c) \cdot T_c$$

Passando nel dominio della trasformata  $z$  si ha:

$$zY(z) - Y(z) = T_c X(z)$$

Da cui :

$$Y(z) = \frac{T_c}{z-1} X(z)$$

Nel dominio di Laplace l'operazione di integrale vale:

$$Y(s) = \frac{1}{s} X(s)$$

Confrontando le precedenti relazioni si ricava:

$$s = \frac{z-1}{T_c}$$

Un metodo più preciso è quello della **trasformazione bilineare o Tustin** che per il calcolo dell'integrale considera una approssimazione trapezoidale piuttosto che rettangolare.

In questo caso l'area di ciascun trapezio in cui si scompone la funzione integrale vale:

$$Y[(n+1) \cdot T_c] - Y[nT_c] = T_c \frac{x(nT_c) + x(n+1)T_c}{2}$$

Nel dominio  $z$  si ha:

$$zY(z) - Y(z) = T_c \frac{X(z) + z \cdot X(z)}{2}$$

Si ricava la seguente relazione approssimata:

:

$$s = \frac{2(z-1)}{T_c(z+1)} \quad \text{e l'inversa} \quad z = \frac{2+sT_c}{2-sT_c} \quad (11)$$

Questa trasformazione è molto utilizzata poiché gode della proprietà che sistemi stabili nel dominio di Laplace  $s$  sono convertiti in sistemi stabili nel dominio  $z$ . L'approssimazione bilineare presenta tuttavia l'inconveniente di introdurre nella risposta in frequenza una distorsione nota come *distorsione di warping*. In particolare, nella progettazione dei filtri digitali per compensare tale distorsione è necessario introdurre un fattore correttivo (prewarping) nel dimensionamento della frequenza di taglio del filtro.

## 5) Trasformazione prewarp

Si basa su una trasformazione simile alla bilineare ma con una relazione tra  $s$  e  $z$  più complessa in modo da ottenere una relazione lineare su un'ampia gamma della risposta in frequenza.

## 6) Trasformazione matched

Utilizza le seguenti equivalenze:

- un polo in  $s = -a$  si trasforma in  $z = e^{-aT}$
- uno zero in  $s = -b$  si trasforma in  $z = e^{-bT}$
- uno zero in  $s = -\infty$  si trasforma in  $z = -1$
- il guadagno statico resta inalterato

### 3.1 Conversione continuo-discreto con il metodo dell'invarianza della risposta impulsiva

La conversione dal dominio di Laplace a quello  $z$  si può ottenere mediante il metodo dell'impulso unitario. Il metodo non si avvale di alcuna approssimazione e

risulta alquanto complesso se la funzione da convertire è complessa poiché si richiede di eseguire l'antitrasformata della funzione assegnata  $G(s)$ , operazione non sempre di facile esecuzione.

Per comprendere il metodo si sviluppa un esempio. Sia dato il sistema tempo-continuo:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

Si vuole determinare l'equazione alle differenze finite che consenta l'implementazione del sistema sull'elaboratore.

Si valuta la risposta alla delta di Dirac. Posto  $E(s) = 1$  si ha, dopo aver scomposto in fratti semplici:

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = e^{-t} - e^{-2t}$$

Discretizzando la precedente con campionamenti ad intervalli  $T_c$  si ottiene:

$$y(nT_c) = e^{-nT_c} - e^{-2nT_c}$$

La trasformata  $z$  corrispondente alla  $G(s)$  assegnata si ottiene trasformando la precedente risposta all'impulso:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{E(z)} = Z[y(nT_c)] = \frac{z}{z - e^{-nT_c}} - \frac{z}{z - e^{-2nT_c}} = \frac{z(e^{-nT_c} - e^{-2nT_c})}{z^2 - z(e^{-nT_c} - e^{-2nT_c}) + e^{-3nT_c}}$$

Dalla precedente si ricava:

$$Y(z)z^2 - Y(z)z(e^{-nT_c} + e^{-2nT_c}) + Y(z)e^{-3nT_c} = E(z)z(e^{-nT_c} + e^{-2nT_c})$$

La corrispondente equazione alle differenze finite risulta:

$$y(nT_c+2) - (e^{-nT_c} + e^{-2nT_c})y(nT_c+1) + e^{-3nT_c}y(nT_c) = (e^{-nT_c} + e^{-2nT_c})E(nT_c+1)$$

La precedente relazione può essere implementata su computer una volta assegnati i valori del tempo di campionamento  $T_c$ , dei dati campionati di ingresso  $E(nT_c)$  e delle condizioni iniziali dell'ingresso e dell'uscita.

**Esempio n.3**

Determinare l'equazione alle differenze finite per il sistema con funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{(s+1)}$$

Si utilizzi la trasformazione bilineare con  $T_c = 0.2$ .

*Risoluzione*

Posto:  $\frac{2(z-1)}{T_c(z+1)} = \frac{z-1}{0.1z+0.1}$  si ricava:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{\frac{z-1}{0.1z+0.1} + 1} = \frac{0.1z+0.1}{z-1+0.1z+0.1} = \frac{0.1z+0.1}{1.1z-0.9}$$

Dalla precedente relazione si ricava:

$$1.1zY(z) - 0.9Y(z) = 0.1zX(z) + 0.1X(z)$$

Moltiplicando ambo i membri per  $z^{-1}$  ed esplicitando  $Y(z)$ , si ricava:

$$Y(z) = 0.818 z^{-1}Y(z) + 0.045X(z) + 0.045 z^{-1}X(z)$$

La corrispondente equazione alle differenze finite risulta:

$$y(n) = 0.818y(n-1) + 0.045x(n) + 0.045x(n-1)$$

Ad esempio, supponendo  $x(n) = 1$  per ogni  $n$  e posto  $y(-1) = 0$ , si ricavano i valori dei dati campionati:

$$y(0) = 0 + 0.09 = 0.09;$$

$$y(1) = 0.0736 + 0.09 = 0.16362;$$

$$y(2) = 0.1338 + 0.09 = 0.2238 ;$$

.....

.....

#### 4. Programma MATLAB

Il programma MATLAB, della MATH WORKS, consente numerose manipolazioni su segnali e funzioni di interesse elettronico. In particolare, è possibile valutare la trasformata e l'antitrasformata sia nel dominio di Laplace  $s$  che in quello  $z$ , determinare le trasformazioni dal tempo-continuo al tempo-discreto e disegnare i diagrammi di Bode e Nyquist.

Di seguito si elencano alcune istruzioni per le suddette trasformazioni.

- `ztrans` ;fornisce la trasformata  $z$
- `iztrans` ;fornisce l'antitrasformata  $z$
- `c2dm` ;trasformazione dal continuo al discreto con "metodo"
- `d2cm` ;trasformazione dal discreto al continuo

Nel campo "metodo" si deve indicare uno di quelli analizzati precedentemente. Oltre a questi comandi è possibile tracciare i digrammi di Bode , Nyquist, ecc.

##### Esempio n.4

Programma per il calcolo della trasformata  $z$  delle funzioni  $f_1 = 2^n$  e  $f_2 = \sin(Kn)$ .

```
disp('Calcolo della trasformata z')
syms K n w z      %Definizioni delle variabili
f1=2^n;           %funzione f1 da trasformare
f2=sin(K*n);      %funzione f2 da trasformare
F1=ztrans(f1)     %F1 è la trasformata z di f1
pretty(F1)        %Visualizza in formato tipicamente matematico
F2= ztrans(f2,w)  %F2 è la trasformata z di f2
pretty(F2)        %Visualizza in formato tipicamente matematico
```

##### Il software produce la seguente risposta

Calcolo della trasformata  $z$

F1 =

$$1/2 * z / (1/2 * z - 1)$$

$$\frac{z}{1/2 z - 1}$$

F2 =

$$w * \sin(K) / (w^2 - 2 * w * \cos(K) + 1)$$

$$\frac{w \sin(K)}{w^2 - 2 w \cos(K) + 1}$$

**Esempio n.5**

La seguente istruzione consente di ottenere l'antitrasformata  $z$  di una funzione assegnata. Nell'esempio  $f = Kz/(z-2)$ .

```
f = iztrans(K*z/(z-2),z,n)
```

**Il software produce la seguente risposta:**

```
f =
K*2^n
```

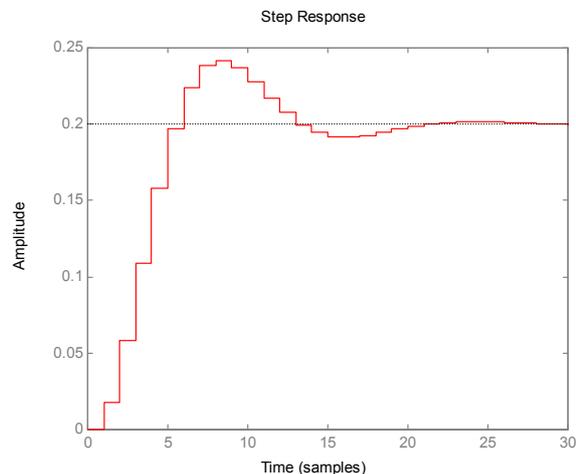
**Esempio n.6**

Il seguente programma consente di determinare la risposta al gradino unitario di un sistema del secondo ordine nel dominio tempo-discreto nota la funzione di trasferimento nel dominio di Laplace.

```
disp('Risposta al gradino di un sistema del secondo ordine tempo -discreto ')
disp('Sia G(s) = 1/(s^2+2*s +5) il sistema del secondo ordine tempo -continuo da
trasformare ')
%Nel continuo la G(s) presenta come numeratore N(s) = 1 e denominatore D(s) =
s^2+2*s +5
num=[1];den=[1,2,5];
%Calcolo poli della G(s)
roots(den)
%Si trasforma la G(s) dal continuo al discreto G(z)
[numd,dend]=c2dm(num,den,0.2,'zoh') %Uso del metodo ZOH con T_c = 0.2 s.
%Risposta al gradino nel tempo discreto
dstep(numd,dend)
```

**Il software produce la seguente risposta**

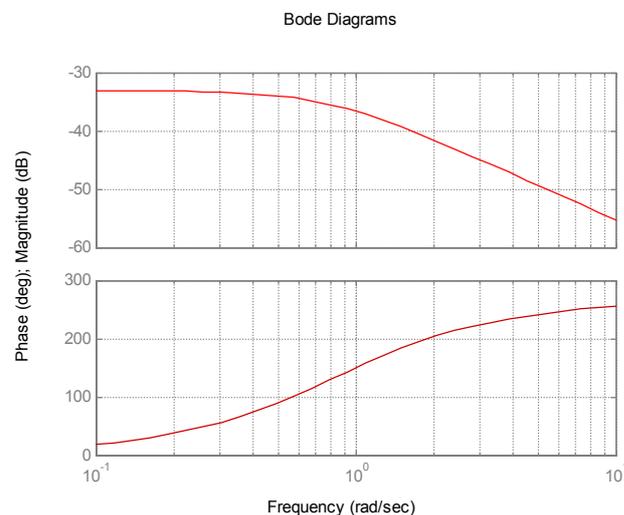
```
ans =
-1.0000+ 2.0000i
-1.0000- 2.0000i
numd =
0 0.0173 0.0151
dend =
1.0000 -1.5082 0.6703
```



**Esempio n.7**

Il seguente programma consente di trasformare una funzione tempo continua  $G(s)$  in una tempo-discreto  $G(z)$  e successivamente tracciare il diagramma di Bode.

```
disp('Diagramma di Bode di un sistema del secondo ordine tempo-discreto')
disp('Sia  $G(s) = 1/(s^2+2*s +5)$  il sistema del secondo ordine tempo-continuo da
trasformare')
%Nel continuo la  $G(s)$  presenta come numeratore  $N(s) = 1$  e denominatore  $D(s) =
s^2+2*s +5$ 
num=[1];den=[1,2,5];
%Si trasforma la  $G(s)$  dal continuo al discreto  $G(z)$ 
[numd,dend]=c2dm(num,den,0.2,'zoh') %Uso del metodo ZOH con  $T_c = 0.2$  s.
%Diagramma di Bode nel tempo discreto
bode(numd,dend)
```

**Il software produce il seguente diagramma di Bode****5. Risoluzione di una equazione alle differenze finite**

In questo paragrafo saranno esaminati, mediate degli esempi, i metodi fondamentali per la risoluzione delle equazioni alle differenze finite.

Sia data l'equazione alle differenze finite:

$$y(n) = x(n) - x(n-1) - y(n-1)$$

con:  $x(n) = 1$  per  $n$  pari e  $x(n) = 0$  per  $n$  dispari

Inoltre si assume che per  $n < 0$  risulta sempre:  $x = y = 0$

a) Risoluzione con il metodo iterativo:

Si calcolano i valori dei campioni ponendo  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Si ricava:

$$y(0) = x(0) = 1$$

$$y(1) = x(1) - x(0) - y(0) = 0 - 1 - 1 = -2$$

$$y(2) = x(2) - x(1) - y(1) = 3$$

Analogamente si ottiene:  $y(3) = -4$ ;

Pertanto il segnale campionato è costituito dalla sequenza numerica:

$$y(n) = (1; -2; 3; -4; \dots) \quad \text{per } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

b) Risoluzione con il metodo della trasformata z

Si ricava la trasformata z del segnale  $y(n)$

$$Y(z) = X(z) - z^{-1}X(z) - z^{-1}Y(z)$$

Da cui si ottiene :

$$Y(z) = \frac{z-1}{z+1} X(z)$$

Determiniamo la trasformata z del segnale  $x(n)$ .

Essendo  $x(n) = 1$  per  $n$  pari e  $x(n) = 0$  per  $n$  dispari si ha:

$$X(z) = 1 + z^{-2} + z^{-4} + \dots = \frac{1}{1 - z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - 1}$$

Sostituendo e semplificando si ottiene:

$$Y(z) = \frac{z^2}{(z+1)^2}$$

Dalla tabella delle trasformate z si ricava:

$$y(n) = \sum_{n=0}^{\infty} [(-1)^n + (-1)^{n+1}] = (1; -2; 3; -4; \dots) \quad \text{per } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

come ricavato con il metodo iterativo.

## 6. Analisi della stabilità

L'analisi della stabilità dei sistemi a dati campionati può essere eseguita con vari metodi tra cui quello di Ragazzini-Zodeh. Un'analisi semplificata del metodo può essere condotta come di seguito.

La variabile  $z$  è stata definita come:

$$z = e^{sT_c}$$

poiché la variabile di Laplace  $s$  è complessa e vale  $s = \sigma + j\omega$  si ricava:

$$z = e^{sT_c} = e^{\sigma T_c} e^{j\omega T_c} = e^{\sigma T_c} (\cos\omega T_c + j\text{sen}\omega T_c)$$

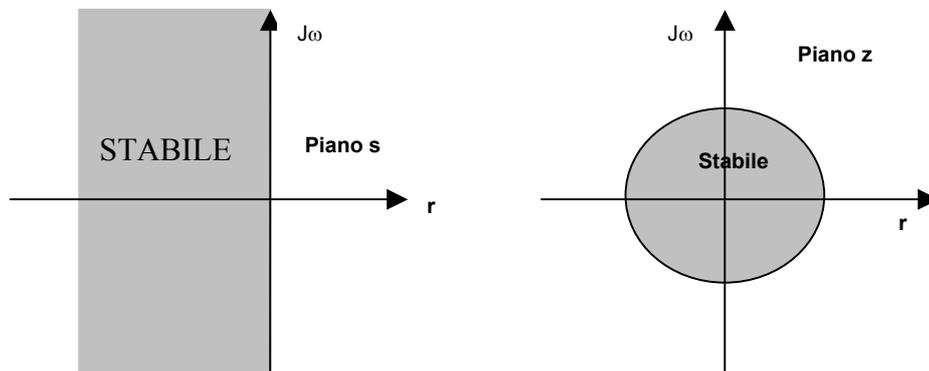
Il modulo e la fase valgono:

$$|z| = e^{\sigma T_c}; \quad \varphi = \omega T_c$$

Le precedenti relazioni ci dicono che:

- All'asse immaginario  $\sigma = 0$  del piano  $s$  corrisponde una circonferenza di raggio unitario  $|z|=1$  nel piano  $z$ ;
- I punti del semipiano sinistro del piano  $s$  hanno  $\sigma < 0$  e pertanto si trasformano in punti interni alla circonferenza di raggio unitario nel piano  $z$ ;
- I punti del semipiano destro del piano  $s$  hanno  $\sigma > 0$  e pertanto si trasformano in punti esterni alla circonferenza di raggio unitario nel piano  $z$ ;

Poiché il criterio di Nyquist della stabilità dei sistemi tempo-continui afferma che un sistema è stabile se i poli della  $G(s)$  appartengono al semipiano sinistro (poli negativi se reali o a parte reale negativa se complessi coniugati) si ricava che un sistema a dati campionati è stabile se i poli della funzione di trasferimento  $G(z)$  sono interni ad un cerchio di raggio unitario del piano  $z$ . In fig.4 si mostrano le zone di stabilità per il piano  $s$  e per quello  $z$ .



**Fig. 4 Zone di stabilità per la collocazione dei poli nel piano  $s$  e nel piano  $z$ .**

**Esempio n. 8**

Verificare la stabilità del seguente sistema a dati campionati e successivamente determinare la risposta all'impulso unitario.

$$G(z) = \frac{3z}{(z + 0.1)(z - 0.2)}$$

*Risoluzione*

La funzione di trasferimento presenta due poli reali:  $p_1 = -0.1$  e  $p_2 = +0.2$ . Poiché il modulo di entrambi i poli è  $|z| < 1$  il sistema risulta stabile.

Ricordando che la trasformata dell'impulso unitario vale 1 si ricava che la risposta  $Y(z)$  del sistema in esame coincide con  $G(z)$ :  $Y(z) = G(z)$ . Si può scrivere:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{3}{(z + 0.1)(z - 0.2)}$$

Scomponendo la precedente in fratti semplici si ha:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{A}{z + 0.1} + \frac{B}{z - 0.2}$$

Si trova:  $A = -10$  e  $B = 10$ , per cui:

$$Y(z) = -\frac{10z}{z + 0.1} + \frac{10z}{z - 0.2}$$

L'antitrasformata  $z$  della precedente vale:

$$y(nT_c) = -10(-0.1)^{nT_c} + 10(0.2)^{nT_c}$$

Sviluppando per  $T_c = 1$  sec si ricavano i valori numerici dei dati campionati e il relativo andamento temporale ottenuto in ambiente Excel e mostrato in fig.5

$$y(nT_c) = (0, 1, 0.3, 0.07, 0.015, 0.0031)$$

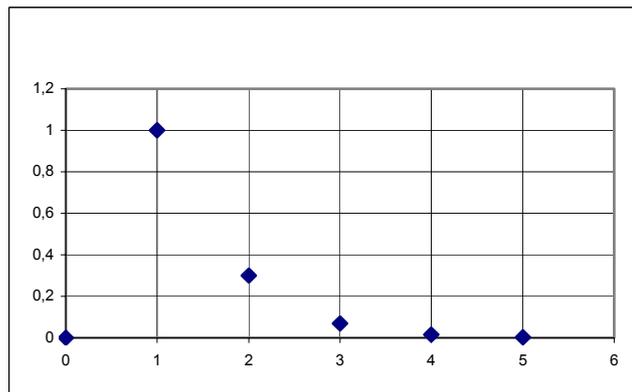


Fig. 5

**Esempio n.9**

Data la seguente equazione alle differenze finite di un sistema del 2° ordine, determinare la risposta al gradino unitario. Si supponga un periodo di campionamento unitario per cui si pone  $nT_c = n$ .

$$Y(n+2) - Y(n+1) + 0.21 Y(n) = 3E(n+1) + 1.2E(n)$$

*Risoluzione*

La trasformata z vale:

$$(z^2 - z + 0.21)Y(z) = (3z + 1.2)E(z)$$

Ricordando l'espressione della trasformata z del gradino unitario:

$E(z) = z/(z - 1)$ , si ricava:

$$Y(z) = \frac{z(3z + 1.2)}{(z - 1)(z^2 - z + 0.21)} = \frac{z(3z + 1.2)}{(z - 1)(z - 0.3)(z - 0.7)}$$

Scomponendo in fratti si ha:

$$Y(z) = \frac{20z}{z - 1} + \frac{7.5z}{z - 0.3} - \frac{27.5z}{z - 0.7}$$

Antitrasformando si ottiene:

$$y(n) = 20 + 7.5(0.3)^n - 27.5(0.7)^n \quad \text{con } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

## 7. Filtri Digitali

I filtri digitali, noti anche come *filtri numerici*, operano su sequenze numeriche e, in funzione delle caratteristiche del filtraggio che si intende eseguire, generano una nuova sequenza numerica. Il segnale analogico su cui si vuole operare è trasformata in forma digitale e successivamente elaborato da dispositivi programmabili. I dati numerici così manipolati sono successivamente trasformati in forma analogica. Per eseguire il filtraggio digitale è, pertanto, necessario sviluppare un software di elaborazione dei dati campionati. In commercio sono disponibili circuiti integrati programmati in fase costruttiva in grado di manipolare i segnali numerici. E' questo il caso, ad esempio, delle schede di acquisizione audio e/o video disponibili sui PC che dispongono di circuiti dedicati alla conversione A/D e D/A e alla manipolazione dei dati. Inoltre, sono disponibili numerosi software per l'elaborazione digitale.

Per realizzare il filtraggio digitale è necessario determinare una **formula iterativa** da cui ricavare una procedura software in grado di elaborare i dati campionati in funzione delle specifiche del problema. In fig. 6 si mostra una schematizzazione di un filtro digitale in cui si evidenzia che il filtro accetta in entrata una sequenza numerica e fornisce in uscita una nuova sequenza frutto dell'elaborazione dei dati.



**Fig. 6 Schema a blocchi di un filtro numerico**

I filtri digitali si possono suddividere in due grandi categorie:

- a) Filtri Ricorsivi IIR
- b) Filtri non Ricorsivi FIR

Nei **filtri ricorsivi** noti anche come filtri IIR (Infinite Impulse Resposte) ciascun campione della sequenza di uscita è ottenuto come combinazione lineare di un numero limitato di campioni di entrata e di uscita. Indicando con  $x$  il segnale campionato di entrata e con  $y$  quello di uscita dal filtro, si può scrivere:

$$y(n) = \sum_{i=0}^N a_i \cdot x(n-i) - \sum_{i=1}^M b_i \cdot y(n-i)$$

Nel filtro ricorsivo è presente una reazione poiché l'uscita è funzione dei dati numerici di entrata e di quelli dell'uscita stessa. La denominazione IIR deriva dal fatto che la risposta all'impulso di Dirac tende a zero asintoticamente. Il valore dei

coefficienti  $a_i$  e  $b_i$  e il numero dei campioni  $N$  e  $M$  definiscono il tipo e le caratteristiche del filtro.

Nei **filtri non ricorsivi** noti anche come filtri FIR (Finite Impulse Resposte) ciascun campione della sequenza di uscita è ottenuto come combinazione lineare di un numero limitato dei soli campioni di entrata. La relazione uscita/entrata si può porre nella forma:

$$y(n) = \sum_{i=0}^N a_i \cdot x(n-i)$$

In questi filtri la risposta all'impulso di Dirac è di tipo finito poiché non è presente alcuna reazione.

### 7.1 Progetto dei filtri digitali

Un metodo ampiamente utilizzato per la progettazione dei filtri numerici consiste nel partire dalla funzione di trasferimento  $G(s)$  del filtro analogico e da questa, utilizzando le formule di conversione continuo-discreto, ricavare la funzione di trasferimento  $G(z)$ . Successivamente antitrasformando  $G(z)$  si ricava l'equazione alle differenze finite che consente di implementare l'algoritmo di progettazione del filtro digitale.

Si sviluppano alcuni esempi utilizzando il metodo della trasformazione bilineare che risulta essere abbastanza semplice nella progettazione e presenta il vantaggio che a sistemi stabili nel dominio  $s$  corrispondono sistemi stabili nel dominio  $z$ .

#### **Filtro passa-basso**

Sia assegnata la funzione di trasferimento tempo-continua di un filtro passa-basso del primo ordine:

$$G(s) = \frac{\omega_t}{s + \omega_t}$$

Dove  $\omega_t = 2\pi f_t$  è la pulsazione di taglio del filtro. Trasformando la precedente relazione nel dominio  $z$  mediante il metodo bilineare:  $s = \frac{2(z-1)}{T_c(z+1)}$  si ricava:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\omega_t}{\frac{2(z-1)}{T_c(z+1)} + \omega_t}$$

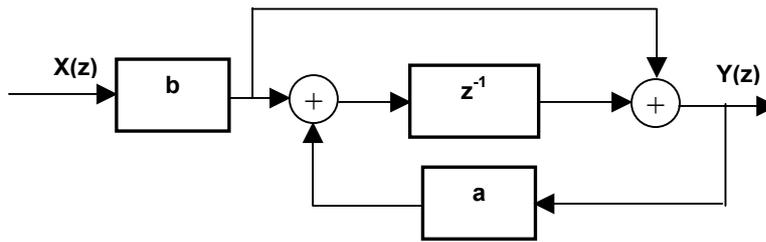
Sviluppando la precedente relazione, dopo alcuni passaggi si ottiene:

$$Y(z) = Y(z) \cdot z^{-1} \cdot \frac{2 - \omega_t T_c}{2 + \omega_t T_c} + \frac{\omega_t}{2 + \omega_t T_c} \cdot X(z) + \frac{\omega_t}{2 + \omega_t T_c} \cdot X(z) \cdot z^{-1}$$

Posto:  $a = \frac{2 - \omega_t T_c}{2 + \omega_t T_c}$ ;  $b = \frac{\omega_t}{2 + \omega_t T_c}$  si ha:

$$Y(z) = bX(z) + z^{-1}[bX(z) + aY(z)]$$

Da cui si ricava lo schema a blocchi di fig. 7.



**Fig. 7 Schema a blocchi di un filtro passa-basso.**

Antitrasformando si ricava l'equazione alle differenze finite del filtro ricorsivo:

$$y(n) = a \cdot y(n-1) + b \cdot [x(n) + x(n-1)]$$

Si è detto che la trasformazione bilineare introduce una distorsione nella risposta nota come *distorsione warping*. Si dimostra che tale distorsione può essere compensata se nella progettazione si sostituisce alla pulsazione di taglio  $\omega_t$  il valore:

$$\omega_t^* = \frac{2}{T_c} \cdot \text{tg} \frac{\omega_t T_c}{2}$$

Si osservi che per elevate frequenze di campionamento l'angolo  $\frac{\omega_t \cdot T_c}{2}$  è piccolo, per cui non è necessaria alcuna correzione essendo la tangente dell'angolo praticamente coincidente con l'angolo stesso. Per cui:

$$\omega_t^* \cong \omega_t$$

Per valutare la *funzione di trasferimento in regime armonico* si devono applicare le seguenti relazioni:

$$z = e^{sT_c}$$

Poiché:  $s = \sigma + j\omega$  si ricava:

$$z = e^{sT_c} = e^{\sigma T_c} e^{j\omega T_c} = e^{\sigma T_c} (\cos \omega T_c + j \sin \omega T_c)$$

Per il filtro passa-basso in esame si ricava:

$$G(j\omega) = \frac{b(1 - \cos \omega T_c + j \sin \omega T_c)}{1 - a(\cos \omega T_c - j \sin \omega T_c)}$$

Il cui modulo vale:

$$|G(j\omega)| = \frac{\sqrt{2b^2(1 + \cos \omega T_c)}}{\sqrt{1 + a^2 - 2a \cos \omega T_c}}$$

### Esempio n. 10

Progettare un filtro passa-basso avente frequenza di taglio  $f_t = 1000$  Hz.

#### Risoluzione

Si sceglie una frequenza di campionamento sufficientemente elevata  $f_c = 1/T_c = 20$  KHz per cui non è necessaria alcuna correzione di *prewarping*. Si valutano i coefficienti  $a$  e  $b$ :

$$a = 0.7286; \quad b = 0.1357$$

Da cui:

$$y(n) = 0.7286 \cdot y(n-1) + 0.1357 \cdot [x(n) + x(n-1)]$$

Il modulo della funzione di trasferimento vale :

$$|G(j\omega)| = \frac{\sqrt{(1 + \cos \omega T_c)}}{\sqrt{41.56 - 39.56 \cos \omega T_c}}$$

#### Filtro passa-alto

Sia assegnata la funzione di trasferimento tempo-continua di un filtro passa-alto del primo ordine:

$$G(s) = \frac{s}{s + \omega_t}$$

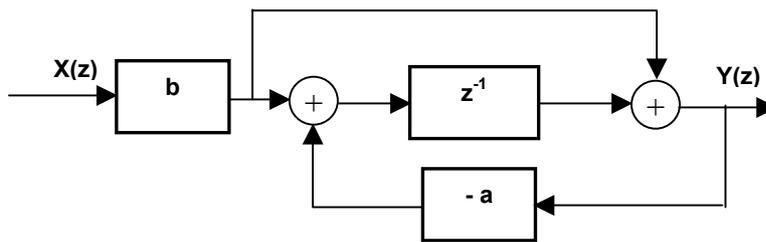
Dove  $\omega_t = 2\pi f_t$  è la pulsazione di taglio del filtro. Trasformando la precedente relazione nel dominio  $z$  mediante il metodo bilineare:  $s = \frac{2(z-1)}{T_c(z+1)}$  si ricava:

$$Y(z) = Y(z) \cdot z^{-1} \cdot \frac{2 - \omega_t T_c}{2 + \omega_t T_c} + \frac{2}{2 + \omega_t T_c} \cdot X(z) - \frac{2}{2 + \omega_t T_c} \cdot X(z) \cdot z^{-1}$$

Posto:  $a = \frac{2 - \omega_t T_c}{2 + \omega_t T_c}$ ;  $b = \frac{2}{2 + \omega_t T_c}$  si ha:

$$Y(z) = bX(z) + z^{-1}[aY(z) - bX(z)]$$

Da cui si ricava lo schema a blocchi di fig. 8.



**Fig. 8 Schema a blocchi di un filtro passa-alto.**

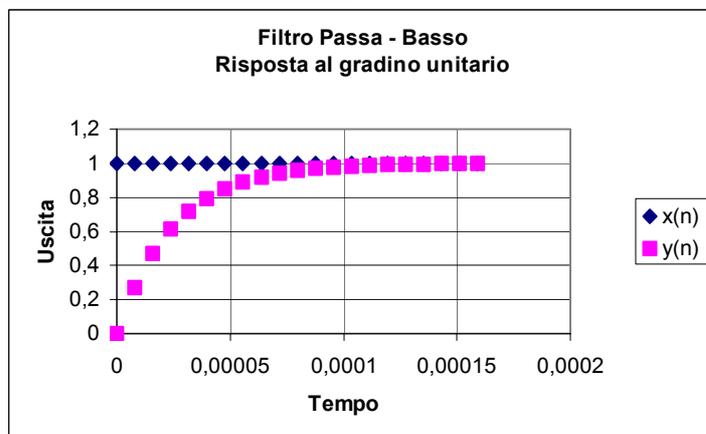
Antitrasformando si ricava l'equazione alle differenze finite del filtro ricorsivo:

$$y(n) = a \cdot y(n-1) + b \cdot [x(n) - x(n-1)]$$

Si riportano le simulazioni, ottenute in ambiente EXCEL, per un filtro passa-basso e passa- alto utilizzando le formule iterative ricavate precedentemente nel caso di ingresso a gradino unitario.

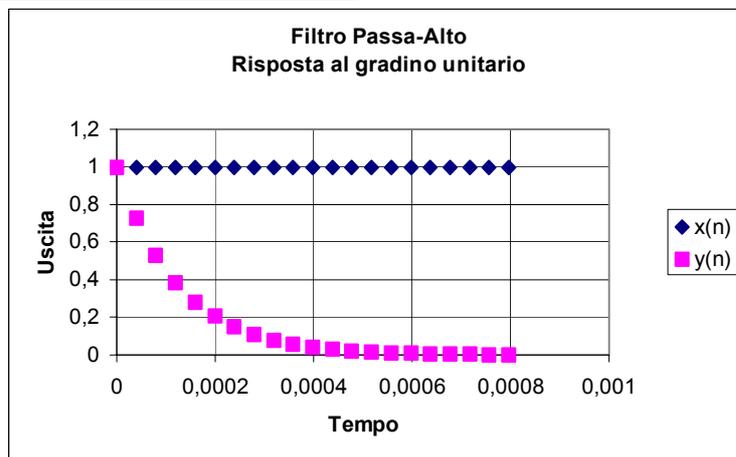
### PASSA-BASSO

Incremento	Tempo	Entrata	Uscita			
		x(n)	y(n)			
0	0	1	0			
1	7,96E-06	1	0,2713915			
2	1,59E-05	1	0,4691297			
3	2,39E-05	1	0,6132034			
4	3,18E-05	1	0,7181767		DATI	
5	3,98E-05	1	0,7946612			
6	4,78E-05	1	0,8503884	ft=	1000	Hz
7	5,57E-05	1	0,8909917	K=	20	
8	6,37E-05	1	0,9205756	fc = K*ft	20000	Hz
9	7,17E-05	1	0,9421307			
10	7,96E-05	1	0,957836	Si ricava:		
11	8,76E-05	1	0,9692789	a =	0,728608	
12	9,55E-05	1	0,9776164	b =	0,135696	
13	0,000104	1	0,9836911			
14	0,000111	1	0,9881172			
15	0,000119	1	0,9913421			
16	0,000127	1	0,9936918			
17	0,000135	1	0,9954038			
18	0,000143	1	0,9966511			
19	0,000151	1	0,99756			
20	0,000159	1	0,9982222			



## PASSA ALTO

		Entrata	Uscita			
Incremento	Tempo	x(n)	y(n)			
0	0	1	1			
1	3,98E-05	1	0,728608			
2	7,96E-05	1	0,53087			
3	0,000119	1	0,386797			
4	0,000159	1	0,281823			
5	0,000199	1	0,205339			
6	0,000239	1	0,149612			
7	0,000279	1	0,109008	DATI		
8	0,000318	1	0,079424			
9	0,000358	1	0,057869	ft =	200	Hz
10	0,000398	1	0,042164	K =	20	
11	0,000438	1	0,030721	fc = K*ft	4000	Hz
12	0,000478	1	0,022384			
13	0,000518	1	0,016309			
14	0,000557	1	0,011883			
15	0,000597	1	0,008658	Si ricava		
16	0,000637	1	0,006308	a =	0,728608	
17	0,000677	1	0,004596	b =	0,864304	
18	0,000717	1	0,003349			
19	0,000756	1	0,00244			
20	0,000796	1	0,001778			
21	0,000836	1	0,001295			
22	0,000876	1	0,000944			
23	0,000916	1	0,000688			
24	0,000955	1	0,000501			
25	0,000995	1	0,000501			



### Analisi di un filtro passa-basso in ambiente Matlab

L'analisi dei filtri digitali può essere condotta utilizzando il programma Matlab. Sviluppiamo un esempio. Si consideri un filtro passa-basso con funzione di trasferimento:  $G(s) = \frac{\omega_t}{s + \omega_t}$ . Sviluppare l'analisi del filtro sapendo che la frequenza di taglio vale  $f_t=1000\text{Hz}$  e che si desidera campionare ad una frequenza  $f_c=200000\text{ Hz}$  ( $T_c=50\mu\text{s}$ ). Applicando la trasformazione bilineare si ha:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\omega_t}{\frac{2(z-1)}{T_c(z+1)} + \omega_t} = \frac{0.135z + 0.135}{z - 0.728}$$

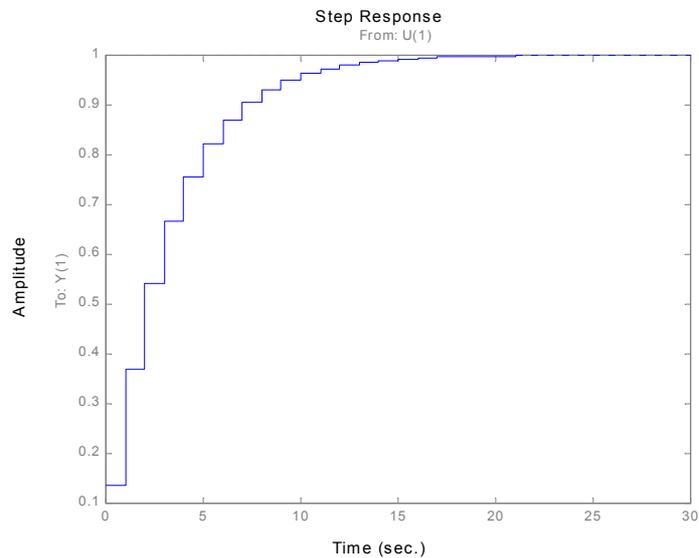
Ricaviamo la funzione di trasferimento  $G(z)$  sviluppando un software con Matlab. Il programma risulta:

```
disp('Trasformata z di un filtro passa-basso')
num=[6280];
den=[1,6280];
disp('Trasformazione Tustin (Bilineare) con Tc=50µs')
[numd,dend]=c2dm(num,den,50*10^-6,'tustin')
[V]=dstep(numd,dend)%V rappresenta i valori dei dati campionati
dstep(numd,dend) % Traccia il grafico della risposta al gradino
```

#### *Il software produce la seguente risposta:*

Trasformata z  
Trasformazione tustin (bilineare) con  $T_c=50\mu\text{s}$

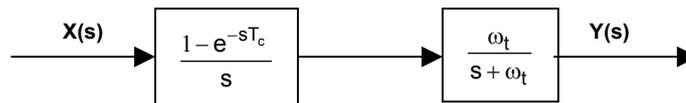
```
numd =
0.1357  0.1357
dend =
1.0000  -0.7286
V =
0.1357
0.3703
0.5412
0.6657
0.7564
0.8225
0.8707
0.9058
0.9314
0.9500
0.9636
0.9734
0.9807
0.9859
```



### Filtro passa-basso con il metodo ZOH

Si descrive la procedura per la progettazione dei filtri digitali utilizzando il metodo ZOH.

In fig.9 si mostra lo schema a blocchi relativo ad un filtro numerico passa-basso. Il primo blocco rappresenta la f.d.t del modulo ZOH mentre il secondo blocco individua la f.d.t. del passa-basso del 1° ordine.



**Fig. 9 Schema a blocchi di un filtro passa-basso con modulo ZOH.**

Dove  $\omega_t = 2\pi f_t$  è la pulsazione di taglio del filtro e  $T_c$  il periodo di campionamento.

Si ricava:

$$G(s) = (1 - e^{-sT_c}) \cdot \frac{\omega_t}{s(s + \omega_t)}$$

$$\text{Si pone: } I(s) = 1 - e^{-sT_c} \quad \text{e} \quad G_1(s) = \frac{\omega_t}{s(s + \omega_t)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \omega_t};$$

Essendo il periodo di campionamento  $T_c$  e posto  $t = T_c$ , si ricava:

$$G_1(z) = Z \left[ L^{-1} \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \omega_t} \right) \right] = Z [1 - e^{-\omega_t t}] = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - e^{-\omega_t T_c}} = \frac{z(1 - e^{-\omega_t T_c})}{(z-1)(z - e^{-\omega_t T_c})}$$

$$I(z) = Z [L^{-1} (1 - e^{-sT_c})] = 1 - z^{-1} = \frac{z-1}{z}$$

La funzione di trasferimento vale:

$$G(z) = G_1(z)I(z) = \frac{1 - e^{-\omega_t T_c}}{z - e^{-\omega_t T_c}}$$

Supponendo una frequenza di taglio  $f_t=1200\text{Hz}$  e un campionamento a  $f_c=125.6\text{KHz}$  si ricava:

$$\omega_t = 0.05998 \text{ rad/s e } T_c = 7.96\mu\text{s}.$$

Sviluppando i calcoli e moltiplicando numeratore e denominatore per  $z^{-1}$  si ottiene:

$$Y(z) = X(z)G(z) = \frac{0.06 \cdot z^{-1} \cdot X(z)}{1 - 1.06 \cdot z^{-1}}$$

Sviluppando la precedente si ha :

$$Y(z) = 1.06Y(z) \cdot z^{-1} + 0.06X(z) \cdot z^{-1}$$

Antitrasformando si ricava l'equazione alle differenze finite:

$$y(n) = 1.06y(n-1) + 0.06x(n-1)$$

La precedente relazione è di facile implementazione su computer.

### Filtro passa-alto con ZOH

In fig.10 si mostra lo schema a blocchi relativo ad un filtro numerico passa-alto. Il primo blocco rappresenta la f.d.t del modulo ZOH mentre il secondo blocco individua la f.d.t. del passa-alto.



**Fig. 10 Schema a blocchi di un filtro passa-alto con modulo ZOH**

Dove  $\omega_t = 2\pi f_t$  è la pulsazione di taglio del filtro e  $T_c$  il periodo di campionamento.

Procedendo come per il passa-basso si ricava:

$$G(z) = G_1(z)I(z) = \frac{z-1}{z - e^{-\omega_t T}} = \frac{1-z^{-1}}{1 - z^{-1} \cdot e^{-\omega_t T}}$$

Supponendo una frequenza di taglio  $f_t = 200\text{Hz}$  e un campionamento a  $f_c = 4000\text{KHz}$  si ricava:

$\omega_t = 1256 \text{ rad/s}$  e  $T_c = 250\mu\text{s}$  e quindi:

$$Y(z) = 0.73Y(z) \cdot z^{-1} + X(z) - X(z) \cdot z^{-1}$$

Antitrasformando si ricava l'equazione alle differenze finite:

$$y(n) = 0.73y(n-1) + x(n) - x(n-1)$$

La precedente relazione è di facile implementazione su computer.

Si osservi, per concludere, che l'uso della trasformazione ZOH risulta più laboriosa di quella bilineare.