

## Modulazione con portante e modulante sinusoidali

In questo paragrafo saranno esaminate le principali tecniche di modulazione nel caso di portante sinusoidale e informazione da trasmettere di tipo sinusoidale.

In particolare si svilupperanno i concetti relativi alla **Modulazione di Ampiezza AM**, alla **Modulazione di Frequenza FM** e alla **Modulazione di Fase PM**.

La portante è un segnale sinusoidale in alta frequenza che si può porre nella forma:

$$v_p(t) = V_p \cdot \cos(\omega_p t + \varphi) \quad (1)$$

L'informazione da trasmettere è, nel caso più semplice, di tipo sinusoidale e vale:

$$v_m(t) = V_m \cdot \cos \omega_m t \quad (2)$$

La modulazione può ottenersi o modificando l'ampiezza (Modulazione di Ampiezza) o la frequenza (Modulazione di Frequenza) o la fase (Modulazione di Fase) del segnale portante in modo proporzionale all'ampiezza istantanea del segnale modulante  $v_m(t)$ .

In pratica, inoltre, è sempre  $\omega_p \gg \omega_m$ .

### 3. Modulazione di ampiezza

La modulazione di ampiezza AM (Amplitude Modulation) consiste nel far variare l'ampiezza del segnale portante in modo direttamente proporzionale all'ampiezza istantanea della modulante. Il segnale modulato ha la stessa frequenza della portante.

Se la portante è espressa dalla (1), nella quale per semplicità poniamo  $\varphi=0$ , mentre la modulante è sinusoidale come la (2), il segnale modulato in ampiezza assume l'espressione:

$$v(t) = \left( V_p + K_a \cdot V_m \cdot \cos \omega_m t \right) \cdot \cos \omega_p t \quad (3)$$

Dove  $K_a$  è una costante di proporzionalità che dipende dalle caratteristiche elettriche del modulatore impiegato.

In fig. 3 si mostrano, correlati tra loro, gli andamenti dei segnali  $v_m(t)$ ,  $v_p(t)$  e  $v(t)$ .

Essendo  $\omega_p \gg \omega_m$  in un periodo del segnale portante è contenuto un numero elevatissimo di oscillazioni del segnale modulante. In fig.3 tale situazione non è evidenziata per ovvi motivi grafici.

La (3) si può porre nella forma:

$$v(t) = V_p \left( 1 + \frac{K_a \cdot V_m}{V_p} \cdot \cos \omega_m t \right) \cdot \cos \omega_p t = V_p \cdot \left( 1 + m_a \cdot \cos \omega_m t \right) \cdot \cos \omega_p t \quad (4)$$

Il fattore  $m_a = K_a \cdot V_m / V_p$ , prende il nome di indice o *profondità di modulazione* e deve essere  $m_a \leq 1$  affinché l'involuppo<sup>1</sup> del segnale modulato abbia lo stesso andamento dell'informazione da trasmettere. Per  $m_a > 1$  il segnale  $v(t)$  si dice in *sovramodulazione*. In tal caso si introducono notevoli distorsioni nell'involuppo del segnale modulato che non consentono, in ricezione, una ricostruzione fedele dell'informazione.

Nella radiodiffusione si impone, solitamente:  $m_a \cong 40\%$ .

---

<sup>1</sup> Per *involuppo* si intende il luogo dei punti di picco relativi al segnale modulato.

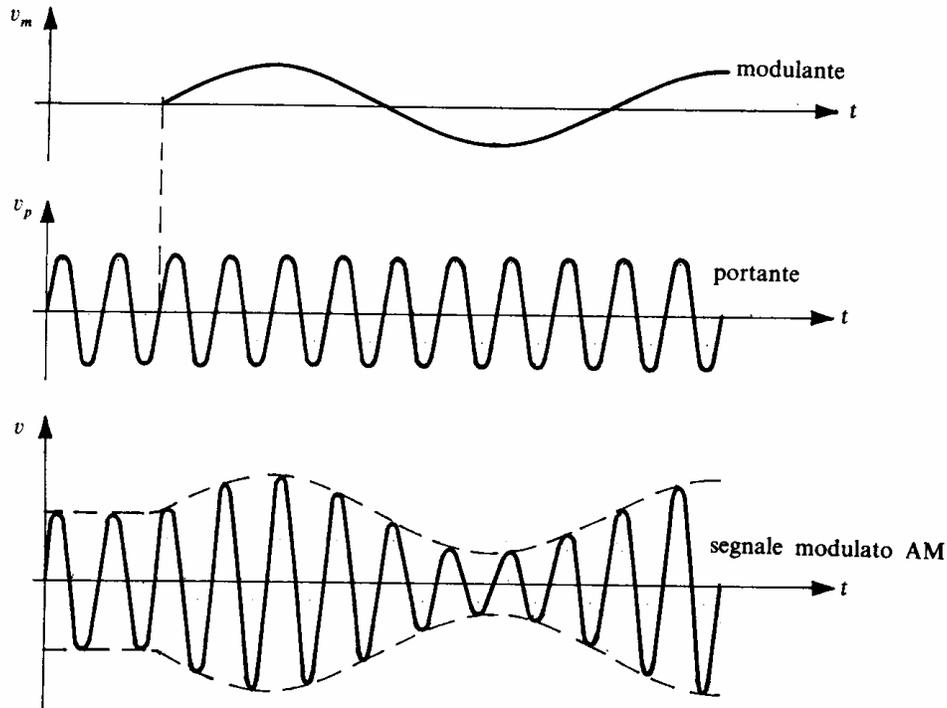


Fig. 3. - Relazione temporale tra segnale modulante, portante e modulato in un sistema AM.

Sviluppando la (4) si ha:

$$v(t) = V_p \cdot \cos \omega_p t + m_a V_p \cdot \cos \omega_p t \cdot \cos \omega_m t \quad (5)$$

Applicando la formula di Werner<sup>2</sup> relativa al prodotto di funzioni coseno, si ha:

$$v(t) = V_p \cos \omega_p t + \frac{m_a V_p}{2} \cdot \cos(\omega_p - \omega_m) \cdot t + \frac{m_a V_p}{2} \cos(\omega_p + \omega_m) \cdot t \quad (6)$$

La precedente relazione mostra che un segnale AM, si può ritenere costituito dalla portante più due componenti cosinusoidali dette *righe* o, più in generale, *bande laterali*. In fig. 4 si mostra il relativo spettro di frequenza.

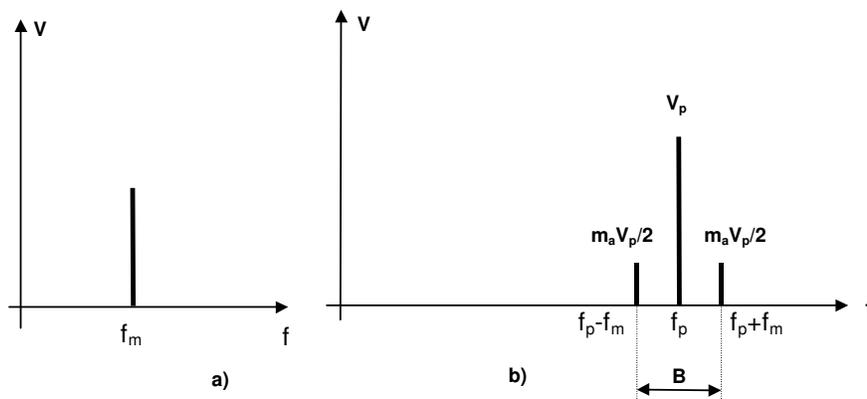


Fig. 4. - a) Spettro del segnale modulante; b) Spettro di un segnale AM nel caso di modulante sinusoidale.

<sup>2</sup> Le formule di Werner consentono di trasformare il prodotto di funzioni sinusoidali in somme. Si ha:

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} \cdot [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]; \quad \sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} \cdot [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

Si definisce larghezza di banda o canale la quantità:  $B = 2f_m$ .

Se il segnale modulante è una generica funzione periodica scomponibile in una somma di segnali sinusoidali (sviluppo in serie di Fourier) è possibile applicare per ognuno di essi il metodo precedentemente descritto; si otterranno, quindi, un insieme di oscillazioni laterali dovute alle singole componenti del segnale modulante.

In fig. 5a) si mostra lo spettro di frequenza del segnale modulante denominato *segnale in banda base*. Tale spettro si estende tra  $f_{\min}$  ed  $f_{\max}$  ed è stato indicato con un triangolo rettangolo, come si è soliti fare in campo telefonico. Nella fig.5b) si riporta lo spettro del relativo segnale AM. Si osservi che la modulazione di ampiezza ha prodotto, sostanzialmente la traslazione o **conversione di frequenza** della banda base generando due bande: la *banda laterale inferiore* e la *banda laterale superiore*. Per tale motivo la modulazione AM è nota anche come *modulazione in banda traslata*.

La conversione di frequenza è una interessante proprietà della modulazione AM. Utilizzando un filtro passa banda è possibile, ad esempio, estrarre la sola banda laterale superiore che contiene le stesse armoniche del segnale in banda base traslate, però, di una quantità costante pari alla frequenza della portante.

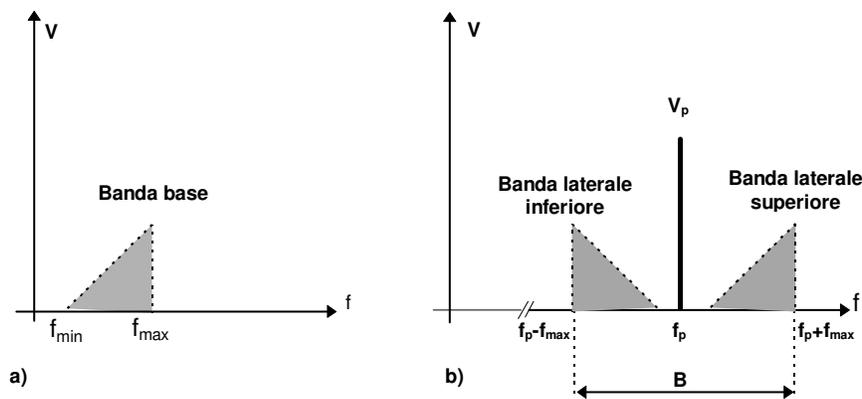


Fig. 5. - Spettro di frequenza di un segnale AM nel caso di modulante periodica con banda  $f_{\max}-f_{\min}$ .

Indicando con  $m_1, m_2, m_3, \dots$  gli indici di modulazione di ciascuna componente armonica, l'indice di modulazione complessivo  $m_a$  è la media geometrica degli indici di modulazione:

$$m_a = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + \dots} \quad (7)$$

Se  $f_{\max}$  è la massima frequenza contenuta nel segnale modulante, supposto periodico, la larghezza di banda risulta:

$$B = 2 \cdot f_{\max} \quad (8)$$

Nelle trasmissioni radiofoniche il segnale modulante è il suono il cui campo di frequenza si estende tra 20Hz e 20 KHz. La larghezza del canale AM di un segnale sonoro, quindi, dovrebbe occupare una banda  $B = 40$  KHz. Per aumentare il numero dei canali si deve ridurre la larghezza di banda da assegnare a ciascuno di essi; si è stabilito, attraverso accordi internazionali, di fissare  $B=10$  KHz in modo da non perdere eccessivamente la fedeltà in trasmissione.

Nella radiodiffusione le trasmissioni AM sono allocate nella gamma di frequenze comprese tra 540 KHz e 1600 KHz. In tal modo avendo assegnato ad ogni canale una banda di 10 KHz è possibile moltiplicare circa 100 comunicazioni contemporanee.

### 3.1 Potenza e rendimento di un segnale AM

Un segnale AM con modulante sinusoidale è descritto dalla relazione (6).

Se si indica con R la resistenza di uscita del circuito modulatore la potenza complessiva del segnale AM è la somma di quella associata alla portante  $P_p$  più quella delle due oscillazioni laterali, inferiore  $P_{bi}$  e superiore  $P_{bs}$ :

$$P_{tot} = P_p + P_{bi} + P_{bs}$$

Si ha:

$$P_{tot} = \frac{V_p^2}{2R} + \frac{m_a^2 \cdot V_p^2}{8 \cdot R} + \frac{m_a^2 \cdot V_p^2}{8R} \quad (9)$$

Si definisce rendimento di modulazione il rapporto tra la potenza associata ad una banda laterale e quella totale:

$$\eta = \frac{m_a^2 V_p^2 / 8R}{\frac{V_p^2}{2 \cdot R} \cdot \left(1 + \frac{m_a^2}{2}\right)} = \frac{m_a^2}{2(2 + m_a^2)} \quad (10)$$

La (10) ci dice che il rendimento dipende dalla profondità di modulazione  $m_a$ .

Nel caso limite  $m_a = 1$ , si ha:  $\eta_{max} = 16.7\%$ .

Il basso rendimento si giustifica tenendo presente che la maggior parte della potenza è associata alla portante che non contiene l'informazione da trasmettere.

Se il segnale modulante è costituito da più armoniche le precedenti formule (9) e (10) sono ancora valide pur di porre:  $m_a = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + \dots}$ .

### 3.2. Metodi per ottenere la modulazione AM

La modulazione di ampiezza si realizza, normalmente, applicando il segnale portante in alta frequenza all'ingresso di un amplificatore (a transistor, JFET, ecc.) caratterizzato da un'amplificazione  $A_0$ .

Il segnale modulante  $v_m$ , supposto per semplicità sinusoidale, è inserito nell'amplificatore in modo da rendere l'amplificazione  $A_0$  direttamente dipendente dall'ampiezza del segnale  $v_m$ . Ciò consente di ottenere in uscita dall'amplificatore un segnale avente stessa frequenza della portante ma con ampiezza variabile in accordo all'ampiezza istantanea del segnale modulante.

#### 3.2.2. Modulatore quadratico

L'analisi matematica sviluppata nei precedenti paragrafi, ed in particolare la relazione (5), ha evidenziato che per ottenere un segnale AM è necessario realizzare il *prodotto di modulazione*  $\cos\omega_p t \cdot \cos\omega_m t$ .

Tale prodotto si può ottenere applicando la somma dei segnali portante e modulante in un dispositivo non lineare avente la corrente o la tensione di uscita proporzionale al quadrato della tensione di ingresso.

In fig. 7 si mostra lo schema a blocchi di un modulatore quadratico noto come *modulatore di Van der Bijl*.

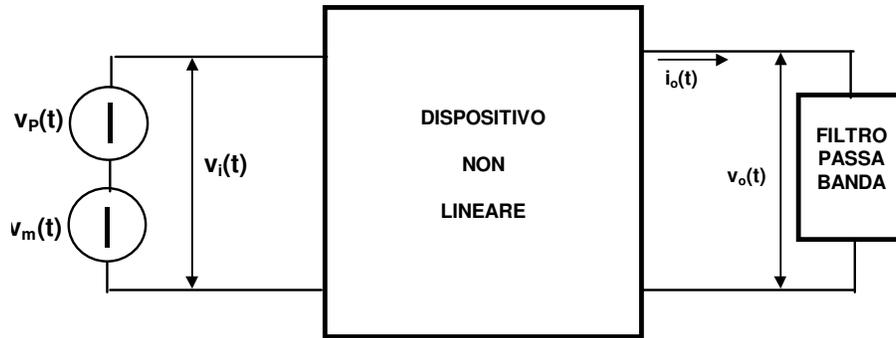


Fig. 7. - Schema a blocchi di un modulatore quadratico.

Supponiamo che la relazione di non linearità tra la corrente di uscita  $i_o$  e la tensione di entrata  $v_i$  sia del tipo:

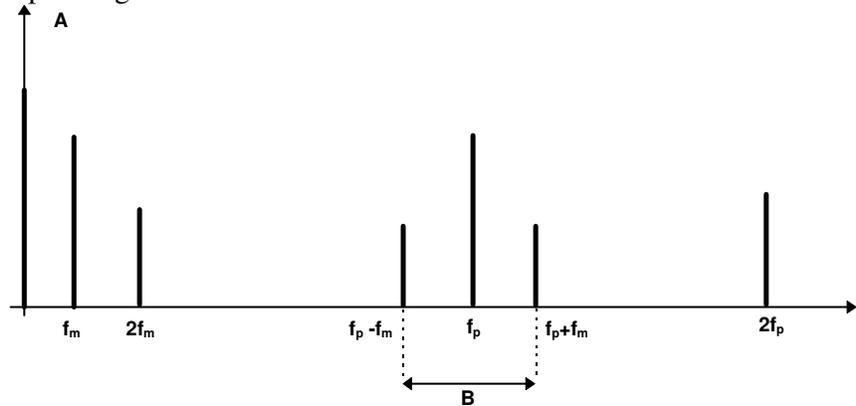
$$i_o = a \cdot v_i^2 + b \cdot v_i + c \quad (11)$$

dove i parametri  $a$ ,  $b$ ,  $c$  sono delle costanti caratteristiche del dispositivo non lineare.

Posto:  $v_i = V_p \cos \omega_p t + V_m \cos \omega_m t$ , la (11) diventa:

$$i_o = a \cdot (V_p \cos \omega_p t + V_m \cos \omega_m t)^2 + b \cdot (V_p \cos \omega_p t + V_m \cos \omega_m t) + c$$

Sviluppando la precedente relazione si ricava che il segnale  $i_o$  è caratterizzato da una spettro in frequenza del tipo di fig.8.

Fig.8. - Spettro in frequenza del segnale  $i_o$  del modulatore quadratico.

Le ampiezze delle armoniche relative allo spettro di fig.8 valgono:

- $\frac{a}{2}(V_p^2 + V_m^2) + c$  ; componente continua
- $bV_m \cos \omega_m t$  ; componente a frequenza  $f_m$
- $\frac{a}{2}V_m^2 \cos 2\omega_m t$  ; componente a frequenza  $2f_m$
- $aV_p V_m \cos(\omega_p - \omega_m)t$  ; componente a frequenza  $f_p - f_m$
- $bV_p \cos \omega_p t$  ; componente a frequenza portante  $f_p$
- $aV_p V_m \cos(\omega_p + \omega_m)t$  ; componente a frequenza  $f_p + f_m$
- $\frac{a}{2}V_p^2 \cos 2\omega_p t$  ; componente a frequenza  $2f_p$

L'analisi spettrale della corrente  $i_o$  mostra che essa contiene le componenti armoniche del segnale AM e cioè:  $f_p - f_m$ ;  $f_p$ ;  $f_p + f_m$ .

Inserendo in uscita al modulatore quadratico un opportuno filtro di banda, come ad esempio un circuito risonante accordato sulla frequenza della portante  $f_p$ , è possibile eliminare le componenti spurie e prelevare le sole armoniche relative al segnale AM.

Pertanto, nell'ipotesi che il carico sia un filtro selettivo sulla frequenza  $f_p$  con banda passante  $B = 2f_m$ , la tensione di uscita  $v_o$  vale:

$$v_o = R_L \cdot i_o = R_L [ bV_p \cos \omega_p t + aV_p V_m \cos(\omega_p - \omega_m)t + aV_p V_m \cos(\omega_p + \omega_m)t ]$$

La relazione precedente, praticamente coincidente con la (6), è valida solo nel caso ideale in cui il carico del filtro di banda è caratterizzato da una resistenza costante pari ad  $R_L$  entro la banda  $B$ , mentre fuori banda è  $R_L = 0$ .

### 3.3. Demodulazione AM

La *demodulazione* o *rivelazione* è un'operazione che consente di estrarre, da un segnale modulato in ampiezza, l'informazione in bassa frequenza. Nell'operazione di demodulazione si realizza una conversione di frequenza che a partire dallo spettro del segnale AM permette di ricostruire il segnale in banda base.

La demodulazione è, normalmente, realizzata utilizzando un dispositivo non lineare, che nella maggior parte dei casi è un diodo, seguito da un filtro passa basso in grado di ricostruire l'involuppo del segnale AM. Trova la maggiore applicazione pratica il *rivelatore d'involuppo a diodo*.

#### 3.3.1. Rivelatore AM a diodo

In fig. 10 si mostra lo schema di un rivelatore di involuppo a diodo per segnali modulati in ampiezza. Durante i picchi positivi del segnale modulato  $v(t)$  il diodo è in conduzione e il condensatore si carica molto rapidamente essendo la resistenza del diodo in conduzione di poche decine di Ohm. Tra due picchi successivi il diodo è interdetto ed il condensatore si scarica sulla resistenza  $R$  finché non giunge un nuovo picco positivo del segnale modulato a ricaricare il condensatore.

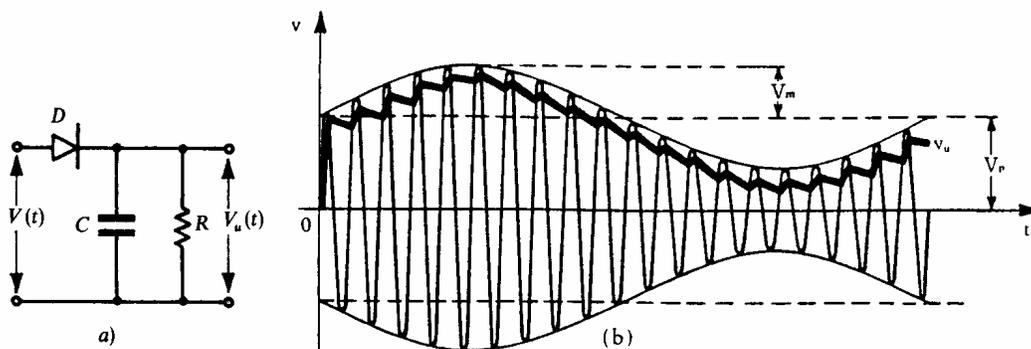


Fig. 10. - a) Rivelatore di involuppo per segnali modulati in ampiezza. b) Forme d'onda caratteristiche.

Il dimensionamento della costante di tempo  $\tau = RC$  è fondamentale. Infatti, se è grande, il condensatore si scarica molto lentamente sulla resistenza  $R$  per cui  $v_m(t)$  non segue l'involuppo del segnale modulato  $v(t)$ . Se invece è piccola il condensatore si scarica rapidamente sulla resistenza  $R$ . In entrambi i casi non si ha una buona ricostruzione dell'involuppo del segnale  $v(t)$ .

Indicando con  $f_{max}$  la massima frequenza contenuta nel segnale modulante si può dimostrare che il valore ottimale della costante di tempo è dato dalla seguente relazione:

$$RC \leq \frac{\sqrt{1 - m_a^2}}{2\pi f_{\max} \cdot m_a} \quad (12)$$

Dalla precedente relazione si evince che quanto più la profondità di modulazione  $m_a$  tende all'unità tanto più è difficile la realizzazione pratica del filtro RC. Nel caso limite in cui  $m_a = 1$  si ricava  $RC = 0$ . Ciò non ha senso pratico e indica la presenza di forti distorsioni nella ricostruzione del segnale in banda base.

Poiché la profondità di modulazione per le normali trasmissioni radio è contenuta entro il 40% la distorsione introdotta dal rivelatore d'involuppo è praticamente trascurabile. In tali ipotesi il termine  $m_a^2$  può essere trascurato e la (12) assume la seguente forma semplificata:

$$RC \cong \frac{1}{2\pi f_{\max} \cdot m_a} \quad (13)$$

Ad esempio, per  $f_{\max} = 4.5$  KHz e  $m_a = 0.3$  si ha:  $RC \cong 118$   $\mu$ sec

Normalmente si pone:  $R = 100$  k $\Omega$  e  $C = 1200$  pF.

Il rivelatore d'involuppo utilizzato nei radioricevitori è realizzato impiegando un circuito elettrico più complesso di quello fondamentale riportato in fig.10. Lo schema completo prevede che il segnale di uscita, presente ai capi del condensatore di fig.10, sia ulteriormente filtrato da due filtri distinti: un passa alto e un passa basso.

In fig. 11 si mostra lo schema a blocchi del rivelatore d'involuppo completo.

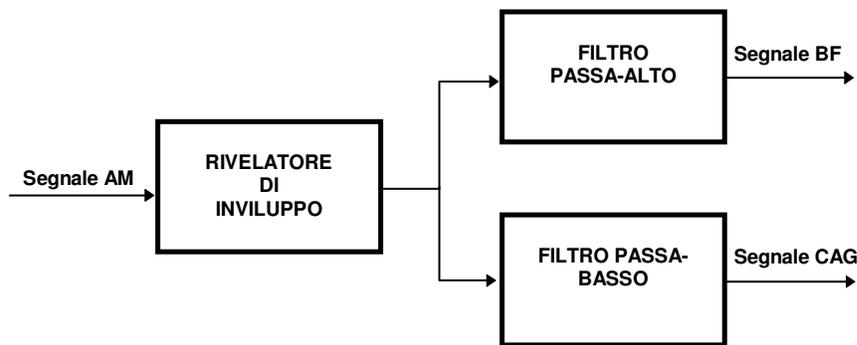


Fig.11. - Schema a blocchi di un rivelatore d'involuppo completo.

Il filtro passa alto ha il compito di eliminare la componente continua e lasciare passare le sole componenti armoniche in bassa frequenza relative al segnale modulante. Tali componenti saranno successivamente amplificate dagli stadi di potenza fino a pilotare l'altoparlante.

Il filtro passa basso ha, invece, il compito di prelevare un segnale proporzionale al valor medio dell'ampiezza della portante. Tale segnale è utilizzato per realizzare una reazione negativa negli stadi di amplificazione che precedono il rivelatore in modo da ottenere il cosiddetto *Controllo Automatico del Guadagno* CAG sicché, se il segnale captato dall'antenna del ricevitore diminuisce (aumenta) il sistema CAG produce un aumento (diminuzione) dell'amplificazione in modo da mantenere costante il livello complessivo di potenza sull'altoparlante del radioricevitore. Su tale argomento si tornerà in un prossimo paragrafo.

### 3.4. Trasmissioni AM a doppia banda DSB e a singola banda SSB

Le considerazioni svolte nel paragrafo 3.1 relative al rendimento di modulazione di un segnale AM hanno evidenziato che la potenza associata alle bande laterali rappresenta solo una piccola parte della potenza complessiva del segnale AM. Inoltre, si è detto che la portante non contiene informazioni ma è solo un mezzo che ne consente il trasferimento tra apparato trasmittente

e ricevente. Per aumentare il rendimento di modulazione si impiegano due tecniche denominate **DSB** (*Double Side Band*) e **SSB** (*Single Side Band*).

La DSB consiste nel sopprimere la portante e trasmettere solo le bande laterali. Il segnale trasmesso è, in questo caso, costituito dal solo prodotto di modulazione e il rendimento di modulazione teorico diventa del 50%.

L'apparato ricevente, per poter estrarre il segnale modulante, deve ricostruire il segnale AM completo di portante. In altre parole al ricevitore si deve sommare con la stessa frequenza e fase la portante soppressa in trasmissione in modo da poter pilotare correttamente il rivelatore d'involuppo. Per una buona ricezione della voce e della musica la frequenza della portante deve essere ricostruita con una precisione di almeno 1 parte su  $10^6$  rispetto al valore nominale. Solo nelle trasmissioni tra radioamatori si possono tollerare scarti in frequenza rispetto al valore nominale della portante anche di diverse decine di Hz.

Per limitare gli effetti di distorsione dovuti ad una non corretta ricostruzione della portante nella trasmissione DSB la portante non viene totalmente soppressa ma attenuata tipicamente di un fattore 10 rispetto al livello nominale. Questa soluzione, denominata trasmissione DSB con *portante residua* (vestigial carrier) rappresenta un buon compromesso tra rendimento di modulazione in trasmissione e semplicità nella ricostruzione dell'informazione al ricevitore.

Nella modulazione SSB, invece, si trasmette una sola banda laterale o la *superiore* (*USB - Upper Side Band*) o la *inferiore* (*LSB - Lower Side Band*).

Come per la modulazione DSB anche la SSB può essere di due tipi: una con soppressione totale della portante, l'altra con trasmissione attenuata della portante.

Con la tecnica SSB si ottiene, oltre ad un miglioramento in termini di potenza trasmessa, anche una riduzione della larghezza del canale di trasmissione cosa abbastanza utile nei sistemi di trasmissione a «banda stretta» come quelli telefonici.

### 3.4.2 Modulatore SSB

Per produrre un segnale modulato in ampiezza a singola banda laterale SSB è spesso sufficiente impiegare un filtro passa banda in grado di sopprimere una delle due bande prodotte da un modulatore DSB.

La bontà del *metodo del filtraggio*, dipende essenzialmente dalle caratteristiche del filtro. Nel caso in cui il segnale modulante presenta componenti armoniche in bassa frequenza, anche di pochi Hz, la progettazione del filtro di banda diventa complessa poiché si richiede un'azione filtrante molto selettiva in grado di selezionare segnali che distano di pochi Hz.

Nei sistemi telefonici si utilizzano filtri del secondo ordine che operano nella gamma compresa tra 300 Hz-3400 Hz (banda netta telefonica) con attenuazione fuori banda di 40 dB/dec.

In campo radiotelevisivo si impiegano filtri a componenti passivi LC per bande di frequenza comprese tra 20 KHz e 100 KHz o filtri al quarzo nel caso in cui la banda di frequenza è compresa tra 100 KHz e 10 MHz.

La modulazione di ampiezza a singola banda laterale realizza una *conversione di frequenza*. Il segnale modulante in banda base risulta traslato in frequenza di una quantità costante pari alla frequenza della portante. Il modulatore SSB quando utilizzato per effettuare una conversione di frequenza è noto con il nome di *convertitore fff*.

L'analisi precedente è stata sviluppata nell'ipotesi di segnale modulante sinusoidale ma è facile dimostrare che essa è estensibile a segnali modulanti periodici di forma qualunque.

Per concludere si vuole accennare al fatto che in commercio sono disponibili numerosi circuiti integrati che effettuano la modulazione e la demodulazione di segnale DSB e SSB.

Ricordiamo a tale proposito il modulatore DSB 1496 e il corrispondente demodulatore 1596 prodotti dalla National e dalla Motorola. Tali integrati possono operare con frequenze di portante fino a 100 MHz con un fattore di soppressione della portante superiore a 50 dB.